

*П.М. Эрдниев*

**МЕТОДИКА  
УПРАЖНЕНИЙ  
ПО  
МАТЕМАТИКЕ**











ИЗДАТ



*П. М. Эрдниев*

**МЕТОДИКА  
УПРАЖНЕНИЙ  
ПО  
МАТЕМАТИКЕ**

*Издание второе,  
дополненное  
и переработанное*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ» МОСКВА • 1970



Эрдниев П. М.

Э 75 Методика упражнений по математике. Изд. 2-е, доп. и переработ. Пособие для учителя. М., «Просвещение», 1970.

319 с. с илл.

В пособии излагаются результаты многолетнего эксперимента автора по внедрению наиболее эффективных приемов математических упражнений в школе: метод противопоставления, одновременное изучение взаимно обратных действий, внедрение синтетических упражнений.

В книге не только излагаются результаты исследования, но и ставятся вопросы, требующие дальнейшего изучения.

Творческое использование рекомендуемого материала сыграет положительную роль в улучшении математических знаний школьников.

6-5

109-70

51 (07)

Предлагаем  
части излагают  
нений. В после  
пути осуществл  
математики вос

В книге рас  
на уроках мате  
повысить произ  
учеников; 2) мет  
рактера, которая  
рос о наиболее ц  
поскольку удачн  
условием облегче

Уделено вним  
ких упражнений,

росам проверки

Синтетические

значительной мер

Проведенная н

работа показала,

тические упражне

роль в развитии м

и прочности усво

Освоение мето

лись автором на у

Эксперименталь

дилось многими учи

в школах Калмыцк

курсов Ставрополь

учителями школ на

можно обсуждать

го внедрения отдель



«Просве-  
Элиста,  
Элиста,  
«Просве-  
знаний.

нии ариф-  
1.

## СОДЕРЖАНИЕ

От автора . . . . .	3
---------------------	---

### ЧАСТЬ I

#### ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

1. Математическое упражнение как основной элемент процесса обучения математике . . . . .	5
2. Роль взаимно обратных связей при изучении математики . . . . .	7
3. Метод противопоставления при обучении математике . . . . .	10
4. О перспективах применения метода противопоставления . . . . .	15
5. О значении цикличности в системе математических упражнений . . . . .	24
6. О месте обратных задач при обучении математике . . . . .	28
7. Определенные и неопределенные задачи. Единичные и множественные связи . . . . .	36
8. Математическое творчество — одна из форм самостоятельности мышления учащихся . . . . .	38
9. Характерные особенности процесса составления задач и примеров . . . . .	41
10. Обучение приему обобщения . . . . .	45
11. О классификации упражнений и о математических терминах . . . . .	55
12. О расширении и углублении математических знаний учащихся . . . . .	58
13. Об обучении как процессе переработки информации . . . . .	63
14. Укрупнение единиц усвоения знаний при обучении математике . . . . .	66
15. О некоторых проблемных вопросах методики математики . . . . .	74
16. Выводы . . . . .	78

### ЧАСТЬ II

#### МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АРИФМЕТИКЕ

##### Обыкновенные и десятичные дроби

1. Введение . . . . .	83
2. Возникновение дробей, их запись и чтение . . . . .	85
3. Основное свойство дроби . . . . .	91
4. Сравнение дробей по величине. Изменение величины дроби в зависимости от изменения членов дроби . . . . .	94
5. Округление дробей . . . . .	99
6. Дроби правильные и неправильные . . . . .	101
7. Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование . . . . .	102
8. Приведение дробей к общему знаменателю . . . . .	105
9. Одновременное изучение сложения и вычитания дробей . . . . .	106
10. Умножение и деление обыкновенной дроби на целое число. Увеличение и уменьшение дроби в несколько раз . . . . .	112



11. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз. (Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100 и т. д.)	115
12. Одновременное изучение умножения и деления дробей	117
13. Умножение и деление целого и смешанного чисел на дробь как частные случаи умножения и деления дроби на дробь	121
14. Умножение и деление десятичных дробей	122
15. Нахождение части от числа и всего числа по его части в разделе «Натуральные числа»	125
16. Нахождение части числа и всего числа по его части в разделе дробных чисел	133
17. Работа над тройкой задач: нахождение части числа, числа по величине его части и задачи типа «Какую часть составляет одно число от другого?» (отношения чисел)	137
18. Распространение свойств действий на дробные числа	139
19. Задачи на проценты	144
20. Об изучении приближенных вычислений в связи с изучением действий над дробями	147

### ЧАСТЬ III

#### МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ

##### Глава I. Тождественные преобразования алгебраических выражений

1. Одновременное изучение сложения и вычитания одночленов и многочленов	150
2. Изучение подтемы «Одночлены»	153
3. Изучение подтемы «Одночлены и многочлены»	159
4. Изучение подтемы «Многочлены»	164
5. Сокращенные действия по формулам	168

##### Глава II. Линейные функции, уравнения и неравенства

1. Составление линейных уравнений и их систем	176
2. Составление параметрической системы уравнений, имеющей одно и то же решение	180
3. О классификации систем линейных уравнений	—
4. Об изучении линейной функции	185
5. Об одновременном изучении линейных уравнений и линейных неравенств	188
6. О решении линейных уравнений и неравенств, в записи которых использован знак абсолютной величины (модуля)	192

##### Глава III. Квадратные функции, уравнения и неравенства

1. О введении понятия «квадратное уравнение»	200
2. Составление уравнений, приводимых к квадратным	205
3. О классификации квадратных уравнений	209
4. О решении уравнений с исследованием	212
5. Составление системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными	216
6. Составление симметрических систем уравнений второй степени	217
7. Составление системы линейных уравнений второй степени, левые части которых однородны относительно $x$ и $y$	219
8. О разложении квадратного трехчлена на множители	221
9. Задачи, решаемые на основании свойств квадратного трехчлена	222
10. Построение графика квадратного трехчлена	223
11. Пропедевтика приема преобразования координат	228
12. Об одновременном изучении уравнения и неравенства второй степени	229



115	13. Исследование квадратного трехчлена . . . . .	233
117	14. О преобразованиях квадратных трехчленов и их графиков . . . . .	238
	15. О введении понятия «обратная функция» . . . . .	241
121	16. Составление уравнений парабол . . . . .	247
122	17. Составление уравнений, удовлетворяющих заданным графикам . . . . .	249
	18. Геометрическое построение графиков элементарных функций . . . . .	251

#### Г л а в а IV. Задачи в курсе алгебры

133	1. Прием сравнения при решении задач алгебраическим способом . . . . .	255
	2. О составлении задач по заданному уравнению . . . . .	264
	3. Составление задач по аналогии с решенной . . . . .	266
137	4. Преобразование задачи, решенной посредством системы двух уравнений	
139	первой степени с двумя неизвестными . . . . .	271
144	5. Классификация алгебраических задач, приводящих к линейным урав-	
	нениям . . . . .	272
147	6. Классификация алгебраических задач, приводящих к квадратным урав-	
	нениям . . . . .	286
	7. Некоторые вопросы составления задач, приводящих к квадратным урав-	
	нениям . . . . .	288
	8. Составление задач, приводящих к системе уравнений второй степени . . . . .	293

#### Ч А С Т Ь IV

##### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ УПРАЖНЕНИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ

	1. Об изучении группы взаимосвязанных задач и теорем . . . . .	296
150	2. Об изучении четверки задач «логического квадрата» . . . . .	302
153	3. Методика совместного изучения взаимно обратных теорем . . . . .	307
159	Литература . . . . .	314
164		
168		

. 176  
 . 180  
 . —  
 . 185  
 . 188  
 . 192  
 . 200  
 . 205  
 . 209  
 . 212  
 . 216  
 . 217  
 . 219  
 . 221  
 . 222  
 . 223  
 . 228  
 . 229



## ОТ АВТОРА

Предлагаемая работа состоит из четырех частей. В первой части излагаются общие вопросы методики математических упражнений. В последующих частях на отдельных примерах показаны пути осуществления указанной методики преимущественно в курсе математики восьмилетней школы.

В книге рассматриваются три основных вопроса: 1) применение на уроках математики метода противопоставления, позволяющего повысить производительность труда учителя и улучшить знания учеников; 2) методика синтетических упражнений творческого характера, которая до сих пор оставалась малоисследованной; 3) вопрос о наиболее целесообразной структуре программного материала, поскольку удачная группировка материала сама по себе является условием облегченного и ускоренного усвоения материала.

Уделено внимание классификации и составлению математических упражнений, решению их несколькими способами, а также вопросам проверки и контроля решения задач.

Синтетические упражнения по составлению задач и примеров в значительной мере являются новыми в обучении.

Проведенная нами совместно с коллективом учителей опытная работа показала, что такие упражнения, дополняя обычные аналитические упражнения по решению готовых задач, играют важную роль в развитии математического мышления, достижении глубины и прочности усвоения материала.

Основные методические положения настоящей книги проверялись автором на уроках математики начиная с 1949 г.

Экспериментальное обучение по предлагаемой методике проводилось многими учителями в школах г. Ставрополя (1959—1963 гг.), в школах Калмыцкой АССР (1964—1969 гг.), студентами старших курсов Ставропольского пединститута (1957—1963 гг.), а также учителями школ нашей страны, со многими из них автор имел возможность обсуждать лично или письменно результаты практического внедрения отдельных сторон излагаемой системы обучения.



Круг вопросов, связанных с содержанием книги, обсуждался в последние годы в печати, на научных конференциях.

Значительную помощь в разработке темы книги оказали автору его добровольные корреспонденты, учителя-активисты.

В похвальном стремлении самостоятельно разобраться в ценности тех или иных рекомендаций они перепроверяли наши выводы в весьма разнообразных условиях городских и сельских школ.

Настоящая книга является вторым (переработанным и дополненным) изданием книги «Методика упражнений по арифметике и алгебре» («Просвещение», 1965).

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность всем рецензентам и товарищам, принимавшим участие в экспериментальной проверке методических положений и давшим ценные советы по отдельным вопросам излагаемой системы обучения.

Многолетние наблюдения по внедрению в школу описанной в книге методики позволяют утверждать следующее: многое из того, что при первом знакомстве «противоречит» привычным взглядам учителя, при проверке оказывается вполне приемлемым и достойным применения<sup>1</sup>.

В книге излагаются не только результаты исследования, но и ставятся вопросы, требующие дальнейшего изучения.

Автор надеется, что данная книга будет содействовать детальной разработке методов противопоставления и синтетических упражнений усилиями широкого круга педагогов и психологов и поможет намечающемуся внедрению некоторых элементов этой системы в школьную практику.

В данной связи примечательно то, что согласно новым школьным программам предусматривается сближение во времени взаимосвязанных разделов математики.

Следует ожидать, что в некоторых типах школ, где проблема времени стоит особо остро (вечерние школы, школы с сокращенным сроком обучения, школы с математическим уклоном, средние специальные учебные заведения), рассмотренные в книге приемы и методы обучения могут найти еще более широкое применение и развитие.

В содержание книги входят некоторые задачи, являющиеся естественным обобщением отдельных вопросов школьного курса. Эти задачи могут быть использованы во внеклассных занятиях с учениками, увлекающимися математикой.

Все замечания по поводу книги просьба направлять по адресу: Москва, И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

<sup>1</sup> Вопросы обучения математике по предлагаемой системе в младших классах изложены автором в книгах [55, 59], а также в наших пробных учебниках математики для начальной школы [56, 57, 58]. Здесь и в дальнейшем в квадратные скобки внесен порядковый номер книги из приложенного списка литературы.



## ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ УПРАЖНЕНИЕ КАК ОСНОВНОЙ ЭЛЕМЕНТ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Состояние знаний учеников средней школы по математике в настоящее время нельзя считать вполне удовлетворительным. Несмотря на значительное время, отведенное учебным планом изучению математики, знания по ней все же остаются подчас формальными и быстро выветриваются из памяти.

По свидетельству известных математиков, многие выпускники школ не умеют самостоятельно мыслить и на вступительных экзаменах в вуз они показывают силу своей памяти, а не живую, активно работающую мысль [24].

Многие недочеты в обучении математике являются следствием несовершенства методов преподавания. Наиболее распространенные методы и приемы обучения далеко не соответствуют познавательным способностям учеников; их возможности в действительности значительно выше, чем это принято считать.

Подходя к исследованию проблем обучения математике все-сторонне, возможно обнаружить недостатки общепринятой ныне системы обучения и найти научно обоснованные, эффективные способы и приемы обучения, используя которые можно избежать голей рецептурности, которая нередко встречается в методической литературе.

Совокупность математических понятий, связь между ними относится к предмету математики, а методика математики изучает процесс формирования и развития математических понятий и связей между ними, выявляет наилучшие способы передачи, закрепления знаний и последующего применения их.

Методика математики не может ограничиваться в своей теории понятиями и средствами формальной логики, рассматривающей мышление в статическом плане, с точки зрения результатов мышления; условием успешного развития методики математики является то, чтобы она опиралась на диалектическую логику, поскольку последняя отражает закономерности процесса мышления.

Одним из условий успешного овладения наукой является выявление основного элемента определенной науки, которое позволяет,



сосредоточив усилия исследователей на всестороннем анализе этого элемента, построить логически строгую систему изучаемой отрасли.

В качестве такого основного элемента методики, на наш взгляд, следует взять понятие *математическое упражнение*<sup>1</sup> в самом широком значении этого слова.

Действительно, всякое исследование по методике математики в конце концов сводится к упражнениям: к выяснению принципов классификации их, разнообразия форм и содержания, к вопросу о приемах работы и последовательности выполнения упражнений и т. д.

Усвоение математики осуществляется в процессе выполнения упражнений, а поэтому и развитие методики математики идет по пути внедрения новых форм и видов математических упражнений, вызывающих у школьников большую мыслительную активность.

В настоящее время трудно утверждать, что общие вопросы методики математических упражнений решены достаточно основательно.

В работе над математическим упражнением (задачей) отчетливо выделяются четыре последовательных и взаимосвязанных этапа:

- а) составление математического упражнения;
- б) выполнение упражнения;
- в) проверка (или контроль) ответа;
- г) переход к следующему упражнению.

В существующей практике обучения ограничиваются большей частью вторым из указанных этапов (т. е. одним из четырех этапов работы над упражнением).

В познавательном отношении не может быть нормальным то, что процесс возникновения математического упражнения (задачи, уравнения и т. п.) целиком отдан другому лицу, не обучающемуся. Между тем процесс составления задачи, уравнения, тождества, неравенства и т. п. в психологическом отношении богат своеобразными синтетическими ходами мысли; в той же мере процесс выполнения готового задания, взятый в изоляции от предшествующего этапа (имеется в виду учащийся), носит преимущественно аналитическую направленность, ибо он структурно противоположен этапу составления упражнения.

Понятно отсюда, почему так важно ознакомить ученика с обоими процессами в их диалектически противоречивых качествах и во взаимосвязях.

Даже рассматривая вопрос обучения с обычной, более ограниченной позиции — выработки умения решать определенные виды задач, мы приходим к выводу о необходимости включать в учебную работу школьника деятельность, адекватную (тождественную) той,

<sup>1</sup> Мы не претендуем на окончательность решения данного и некоторых других вопросов. В настоящее время важна уже сама постановка этих вопросов.



которая заключена в задаче; в задаче же заключена прежде всего деятельность по ее составлению, а не только деятельность по ее решению, являющаяся логически второй ступенью, следующей за деятельностью по составлению задачи.

До последнего времени в нашей школе применение математических знаний в основном сводилось к решению задач, в которых математический вопрос уже сформулирован ее составителем. А на производстве, в жизни от человека требуется умение самому сформулировать вопрос и, применяя математические знания, найти ответ на него.

Одним из способов такой подготовки является составление задач учениками на уроках, причем естественно, что вначале образцами для элементарного творчества детей должны служить типичные школьные упражнения.

Серьезного внимания методистов требует последний этап — завершение одного упражнения и переход к новому упражнению, т. е. проблема группировки упражнений по степени трудности их, разнообразия и т. п.

Начавшийся в школе переход к новым программам и учебникам ставит одной из целей нахождение путей ускоренного обучения при одновременном достижении прочности и глубины усваиваемых знаний. И для учителя настало время вплотную заняться этой проблемой.

## 2. РОЛЬ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Методы обучения в значительной степени зависят от существенных внутренних связей соответствующей научной дисциплины.

В качестве таких связей в математике могут быть приняты прежде всего так называемые взаимно обратные связи.

Для подтверждения этой точки зрения обратимся к некоторым фактам из истории математики.

Уже на заре человеческой истории взаимно обратные операции осваивались совместно.

Так, еще при пальцевом счете — при счете пятками — человек научился, например, число 14 представлять одновременно как  $10 + 4$  и как  $15 - 1$  [38, стр. 22].

Историческими исследованиями установлено, что в математике обращение ранее известной операции приводило к качественно новой операции, более сложной по содержанию.

Так, вначале умели выполнять лишь прямые операции над рациональными числами ( $3 \cdot 5 - 4 = \square$ ); поскольку действия здесь

<sup>1</sup> Умение представлять число 14 двояко, как «два пятка да 4» или «три пятка без 1» ( $14 = 5 \cdot 2 + 4 = 5 \cdot 3 - 1$ ), показывает, что наши предки довольно рано освоили повторение равных слагаемых (умножение). И в данной связи возникает снова сомнение в правильности переноса действий второй ступени во II класс.



выполнялись в том порядке, в каком они зафиксированы, скажем, в данной записи, постольку они не выходили за пределы арифметики.

В результате решения данного арифметического примера получается ответ 11 ( $3 \cdot 5 - 4 = 11$ ).

С возникновением мысли об *обращении* этих действий (когда один из компонентов становится неизвестным, а результат входит в условие примера) возникает качественно новое образование — уравнение. (Заменив в предыдущем тождестве число 5 буквой  $x$ , получим уравнение первой степени:  $3x - 4 = 11$ .)

В шумеро-вавилонской математике даже не было специального термина, который выражал бы действие деления: деление у них сводилось к умножению на обратное число [8, стр. 76].

В египетских иероглифах одним и тем же символом обозначалось два противоположных понятия (вверху и внизу; с и без и т. п.).

Профессор К. А. Рыбников в книге «История математики» указывает, что внутренней причиной открытия и развития математического анализа было исследование «обратных задач на касательные» и выявление взаимно обратности задач на дифференцирование и интегрирование [33, стр. 184].

Н. Г. Чеботарев писал: «Для того чтобы каждая задача могла считаться вполне решенной, необходимо решать или, по крайней мере, точно формулировать сущность задачи, ей обратной» [42, стр. 4].

Фридрих Энгельс подчеркивал, что каждое вычитание ( $a-b$ ) можно изобразить как сложение ( $-b+a$ ), каждое деление  $\frac{a}{b}$  как умножение  $a \times \frac{1}{b}$ . Эти возможности видоизменения действий соответствуют законам диалектики.

Далее он указывал: «И это превращение из одной формы в другую, противоположную, вовсе не пустая игра, — это один из самых могучих рычагов математической науки, без которого в настоящее время нельзя произвести ни одного сколько-нибудь сложного вычисления» [4, стр. 223—224].

Переходы от одной формы математического выражения к другой, двусторонние связи, существующие между парами операций, будучи «самыми могучими рычагами в математике», неизбежно должны быть также определяющими и в системе методов обучения математике.

Математика, как никакой другой учебный предмет, в силу своей структуры насквозь пронизана взаимно обратными связями (ассоциациями).

Рассмотрим примеры некоторых ассоциаций.

Первоклассник воспринимает написанное на доске упражнение  $2 + 3 = \square$  (первый член ассоциации); затем называет результат — число 5 (второй член ассоциации).



Если же он разлагает число 5 на слагаемые:  $5 = 2 + 3$  (пять состоит из двух и трех), то это число в чужих умозаключениях можно назвать обратной связью (обратной ассоциацией).

Точно так же переход от сложения к вычитанию ( $6 + 4 = 10$ ,  $10 - 4 = 6$ ), от умножения к делению ( $2 \cdot 6 = 12$ ,  $12 : 6 = 2$ ), от прямой теоремы к обратной и т. п. основан на возникновении прямых и обратных связей (ассоциаций).

Еще пример.

Ученик вычисляет:  $2^5 = 32$ . Ему предложено три числа 2, 5, 32 связать двумя другими способами:  $\sqrt[5]{\quad} = 2$ ,  $\sqrt[2]{\quad} = 5$ . Установить предложенную связь между данными числами с применением понятий извлечения корня ( $\sqrt[5]{32} = 2$ ) и логарифмирования ( $\log_2 32 = 5$ ) оказалось для него трудным. Он знает порознь каждую операцию (что и подтвердилось в данном опыте), но из этого еще не следует, что они у него соединены взаимно обратными связями вида:

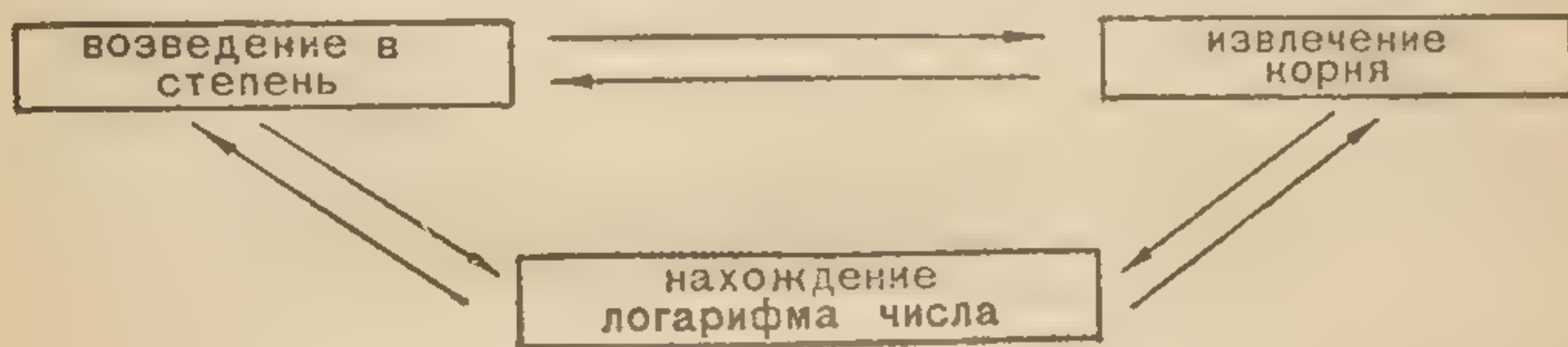


Рис. 1

Советский психолог В. А. Крутецкий в своем исследовании [18] считает основными способностями к усвоению математики следующие:

- 1) способность к быстрому и широкому обобщению математического материала;
- 2) способность к быстрому «свертыванию», сокращению процесса рассуждения и системы соответствующих действий при решении математических задач;
- 3) способность к свободному и быстрому переключению на обратный ход мысли в процессе изучения математического материала.

Эти три вида способностей тесно связаны друг с другом.

Если, например, ученик умеет легко переходить от решения арифметической задачи отдельными действиями к решению ее посредством формулы, то здесь проявляется как способность к обобщению, так и способность к свертыванию процесса рассуждения.

Однако, как показывает наше исследование, способность переключения мысли с прямого хода на обратный является, по-видимому, определяющим, исходным элементом математических способностей.

Нет нужды приводить здесь примеры изъятий, связанных именно с неумением учеников переходить от прямого хода мыслей к обратному.



Ограничимся лишь одним, но весьма показательным: по результатам контрольных работ, проведенных в школах Российской Федерации в 1962 г., 48% десятиклассников не сумели определить значение функции по графику, хотя прямая задача — построение графика по точкам — для них является тривиальной [22].

Известно много случаев противоположного характера, когда наличие упражнений обратной структуры содействовало улучшению качества знаний по математике.

Так, в опыте учителей А. К. Карпенко (с. Приютное, Калмыцкой АССР), Р. И. Обрежа (ст. Энем, Краснодарского края), Ф. Д. Молодык (г. Армавир) и др. систематическое совмещение прямых и обратных действий в V—VIII классах позволило изучить программный материал за значительно меньшее время.

Например, в VI классе они успешно изучали совместно умножение одночленов и многочленов и соответствующие случаи разложения многочленов на множители.

В массовом эксперименте, осуществленном в начальных школах Калмыцкой АССР, была доказана возможность изучения программы четырехлетней начальной школы за три года [55, 59].

### 3. МЕТОД ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

В. И. Ленин в «Философских тетрадах» указывает, что «Вкратце диалектику можно определить, как учение о единстве противоположностей. Этим будет схвачено ядро диалектики, но это требует пояснений и развития». [I, стр. 203].

Обнаружение противоречивой сущности предмета (явления) предполагает одновременное рассмотрение полярно-противоположных частей (сторон) его; если же эти части (стороны) рассматриваются раздельно, то связи между ними не могут быть познаны глубоко и основательно, как в первом случае.

Такая общефилософская постановка вопроса смыкается с результатами исследований в частных науках.

О физиологической природе прямых и обратных связей в мышлении говорит И. П. Павлов в одной из своих незавершенных работ. В ней сказано, что если два нервных пункта связаны, объединены, то нервные процессы двигаются, идут между ними в обоих направлениях [26, стр. 185].

В известных границах допустимо рассматривать предъявление обратной задачи ( $5 - 9$  или  $9 - 5$ ) после разбора прямой задачи ( $5 + 4$ ), как некоторые противоположные раздражители.

Естественно при этом ожидать, что обратная задача будет решена наилучшим образом тогда, когда она попадает в фазу наибольшей чувствительности нервной системы к противоположному по качеству раздражителю (это случится при условии, когда обратная



задача рассматривается вслед за ней без большого промежутка времени между ними).

Из практики обучения известно, что одним из наиболее распространенных типов ошибок являются ошибки подмены понятия противоположным ему понятием; вместо увеличения числа (умножения) уменьшают его (делят); при составлении уравнения по условию задачи вместо знака «+» пишут знак «—» и т. п.

Чтобы преодолеть этот недостаток, многие учителя и методисты идут по пути разведения во времени на почтительное расстояние взаимно обратных задач, т. е. по пути, отвергнутому И. П. Павловым.

Советские психологи, опираясь на учение И. П. Павлова, доказали целесообразность использования метода противопоставления при обучении в школе (Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [7]; Ю. А. Самарин [34]; Е. Н. Кабанова-Меллер [11] и др.).

Типичной в методах обучения математике все еще остается недооценка метода противопоставления.

Авторы многих методических пособий открыто (а в большинстве случаев молчаливо) исходят из того, что взаимно обратные понятия и операции разъясняются детям не одновременно, не совместно, а отдельно и в разное время.

Такая точка зрения до недавнего времени была господствующей, ибо именно в подобном духе были составлены учебники, программы и приспособленные к ним методические пособия.

Однако в связи с обсуждением результатов некоторых исследований [48—1962; 53—1963; 40—1965] в последние годы появилось ряд публикаций, в которых получила подтверждение мысль о большой эффективности системы обучения, основанной на методике противопоставления.

Одновременное изучение взаимно обратных действий в младших классах в свое время осуществил Л. Н. Толстой в организованный им школе в Ясной Поляне, который писал, что учителю кажется легким простое и элементарное, в то время как для детей только сложное и живое кажется легким [39].

Преимущества одновременного изучения арифметических действий отмечал также известный русский методист В. Латышев, который указывал, что при этом ученик как бы опережает ход мысли учителя, догадываясь о новых соотношениях помимо объяснений учителя [19].

Пусть, например, одновременно рассматриваются во II классе умножение и деление по содержанию и вычислены следующие результаты:

$$\begin{array}{ll} \text{по } 6 \cdot 3 = 18, & 18 : \text{по } 6 = 3, \\ \text{по } 6 \cdot 4 = 24, & 24 : \text{по } 6 = 4. \end{array}$$

После выполнения этих упражнений и вычисления одного примера следующей пары упражнений (по  $6 \cdot 5 = 30$ ) ученики пред-



восхищают будущие суждения и самостоятельно извлекают совершенно новую для них информацию:

$$30 : \text{по } 6 = 5.$$

При одновременном изучении взаимно обратных действий, операций, задач, теорем, функций и т. п. значительно экономится время по сравнению с раздельным изучением.

Надо добиваться понимания учащимися двойных определений и правил. Например:

1. а) Взаимно простыми числами называются два или несколько натуральных чисел, которые не имеют общего для всех их множителя, отличного от единицы (5, 12, 15).

б) Взаимно составными числами называются такие натуральные числа, которые имеют общий для всех множитель, отличный от единицы (3, 12, 15).

2. Чтобы умножить (разделить) степени с одинаковым основанием, достаточно в произведении (частном) записать то же основание с показателем, равным сумме (разности) показателей в сомножителях (делимого и делителя) и т. п.

Первый этап противопоставления взаимно обратных операций, как показывают наши наблюдения, должен сводиться к изменению формы при сохранении числовых данных, компонентов:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5} \text{ и } \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$$

(сложение и вычитание дробей);

$$\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7} \text{ и } \frac{6}{7} : 2 = \frac{6}{7 \cdot 2} = \frac{3}{7}$$

(умножение и деление дроби на целое число);

$$2ab^2 \cdot 8a^3 = 16a^4b^2 \text{ и } 16a^4b^2 : 2ab^2 = 8a^3.$$

Упражнения на первом этапе удовлетворяют требованию разделения трудностей; изменение формы при сохранении содержания позволяет осмыслить один и тот же материал с двух точек зрения.

При раздельном изучении взаимно обратных действий одновременно изменяются и форма, и содержание.

В этом случае ученик схватывает в основном различие действий и их результаты, но не переходы от одного к другому; между тем именно последнее является наиболее важным для развития мышления.

После решения нескольких пар упражнений с соблюдением последовательности: прямое действие, затем обратное — надо предложить выполнить сначала обратную операцию ( $24x^3y : 3xy =$ )



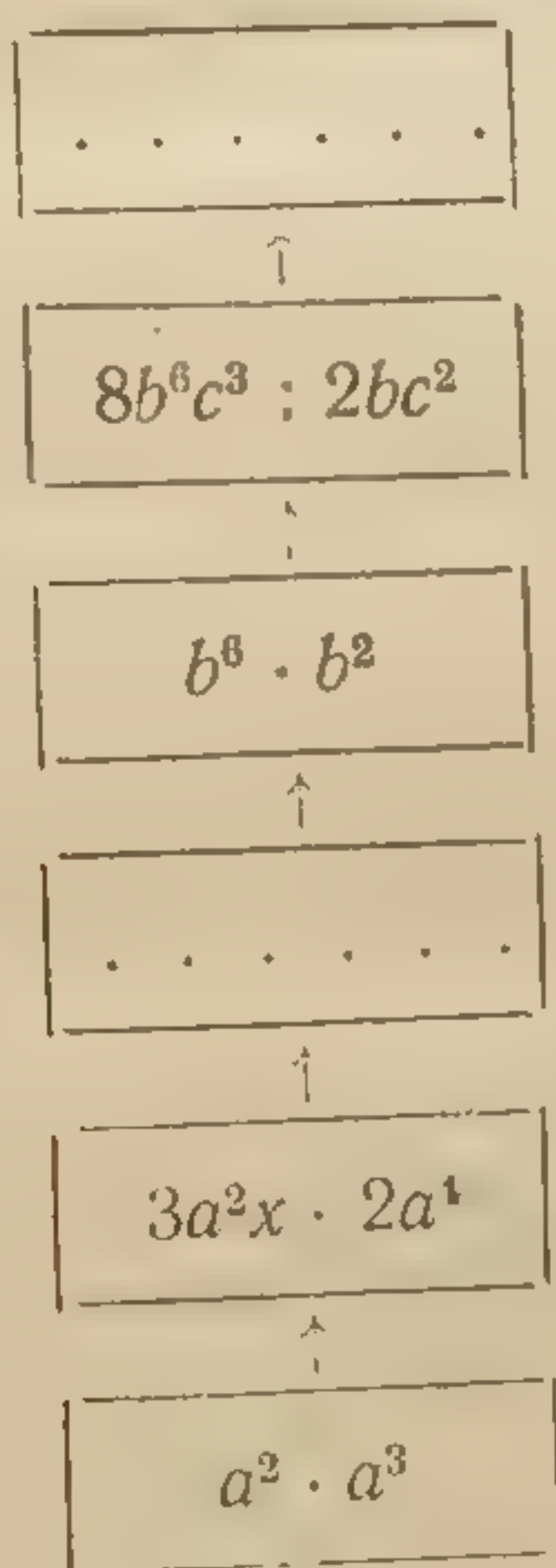
и затем проверить ответ прямой операцией ( $8x^2 \cdot 3xy = 24x^3y$ ). Это второй этап.

Третий этап — это решение упражнений, в которых последовательность прямых и обратных операций идет без определенного порядка, причем проверяются обращением операции лишь в отдельных случаях (преимущественно устно).

Указанные выше три этапа упражнений имеют в определенной мере общее значение: оказывается, что и в случае решения задач целесообразно идти во многих случаях тем же путем, а не относить взаимно обратные задачи к различным годам обучения или же вообще упускать из виду некоторые из обратных задач, что нередко встречается в современной программе.

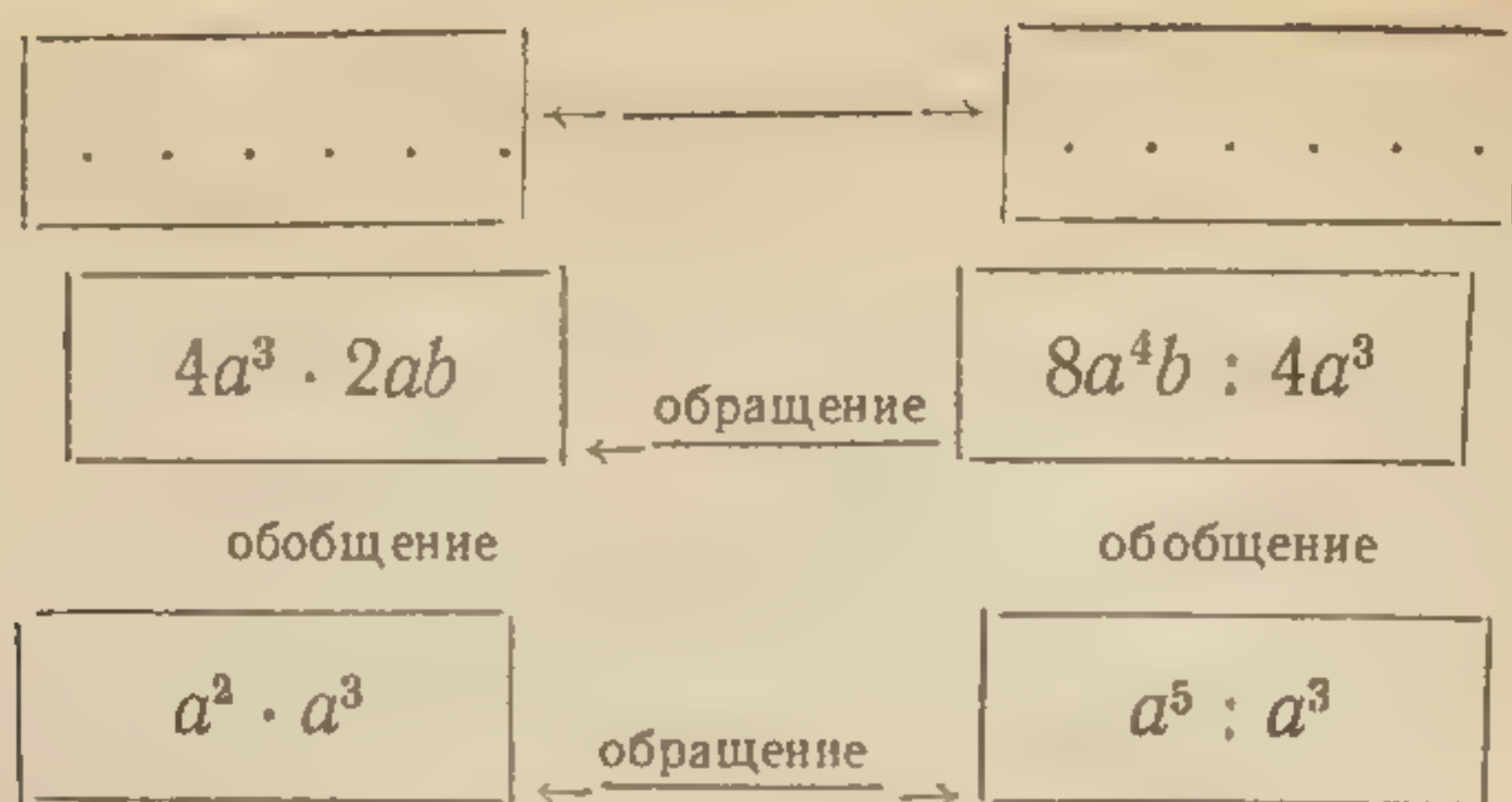
При существующей системе обучения знания у ученика наслаиваются как бы в одном направлении — вверх; если строить обучение на основе противопоставления, то возникают связи в двух направлениях: не только по вертикали (на основе обобщения), но и по горизонтали (на основе обращения).

Схематически соотношения связей для частного случая можно изобразить так:



Раздельное изучение умножения и деления одночленов.





### Одновременное изучение умножения и деления одночленов<sup>1</sup>.

При одновременном изучении обеих операций на основе противопоставления целесообразно предлагать обратных и деформированных примеров значительно больше, чем прямых.

Это вызвано тем, что выполнение обратной операции связано с проверкой посредством обращения. В этом смысле обратная операция включает в себя прямую.

Раздельному изучению взаимно обратных операций в старших классах присущ следующий недостаток: введение обратной операции сопровождается так называемым доказательством, которое сводится к тому, что по записи обратной операции с новым символом восстанавливаем ранее известную прямую операцию с прежним символом; например, формула извлечения корня из произведения, частного и т. п. особо выводится посредством проверки прямой операции — возведением в степень; показательные и логарифмические уравнения надо изучать совместно в одной теме, преимущественно решая логарифмические уравнения, ибо последние решаются на основе показательных.

При введении обратной операции одновременно с прямой операцией дело обстоит иначе: если сразу после решения примера  $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$  мы объясняем обратную операцию  $\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^2$ , то необходимость специального доказательства отпадает, ибо оно осуществляется в форме проверки, так как второе суждение выступает сразу в форме следствия первого суждения.

Чем раньше начато применение метода противопоставления при обучении, тем больше эффект, получаемый от него.

Применение противопоставления не должно проходить эпизодически: в любом классе всегда имеются возможности использования этого метода.

<sup>1</sup> В данной работе под обращением мы понимаем прием составления новых упражнений посредством замены ролями некоторых данных условия и заключения.

В логике под обращением принимают такое же преобразование суждения, причем новые суждения должны быть истинными одновременно с исходным суждением. Система одновременного изучения взаимно обратных действий основана именно на многократном применении логической операции обращения, которая относится к так называемым непосредственным умозаключениям.



#### 4. О ПЕРСПЕКТИВАХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПРОТИВОПОСТАВЛЕНИЯ

В программе каждого класса можно найти такие группы взаимосвязанных вопросов, взаимно обратных или сходных задач, которые в настоящее время по традиции изучаются раздельно. По характеру мыслительных процессов, на которых основывается изучение таких взаимосвязанных разделов, они совершенно сходны, поэтому важно обсудить вопрос о возможностях изучения этих тем в плане противопоставления и сопоставления.

а. Целесообразно изучать одновременно прямые и обратные действия и операции, как-то: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, заключение в скобки и раскрытие скобок, логарифмирование и потенцирование и т. п.

При изучении арифметики в младших классах следует смелее и шире использовать этот прием, например, изучая раздробление и превращение именованных чисел, нахождение части числа и числа по его части, задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз (на несколько единиц) и т. д.

При одновременном изучении прямых и обратных теорем (задач) в геометрии усваивается понятие множества точек («геометрическое место точек») или понятие «характеристическое свойство фигуры».

При одновременном изучении умножения и деления облегчается усвоение понятия действий второй ступени и т. п.

При традиционной методике, по которой обычно чрезвычайно долго отрабатывается какое-либо одно преобразование или правило посредством многократного повторения однообразных упражнений, знания учащихся поневоле пребывают в фазе «элементарных знаний».

В действующих программах во многих случаях допущен отрыв задачи от обратной ей: например, нахождение одной части числа изучается во II классе, а обратная задача — нахождение числа по величине его доли — в IV классе. Мы установили на опыте, что вполне доступно и целесообразно рассматривать эти две задачи на одних и тех же уроках уже во II классе.

Экспериментальное обучение, проведенное нами совместно с учителями школ г. Ставрополя, г. Элисты, убедительно показывает, что перегруппировка материала I—V классов и систематическое применение противопоставления позволяют экономить в каждом классе до 15—20% учебного времени при значительном улучшении знаний учащихся и знакомстве их с большим дополнительным материалом [48].

В настоящее время тождественные преобразования в начальном курсе алгебры изучаются по трем разобренным во времени разделам: действия над одночленами и многочленами (VI класс);



разложение на множители (VII класс); действия над алгебраическими дробями (VII класс)<sup>1</sup>.

Экспериментальное обучение показало, что значительно более выгодным является слияние этих разделов в единой теме «Тождественные преобразования», что позволило бы одновременно рассматривать в едином цикле все возможные формы связей между алгебраическими выражениями по следующим этапам:

$$1) 2a^5 \cdot 3a^2 = 6a^7; \quad 6a^7 : 3a^2 = 2a^5;$$

$$\frac{6a^7}{3a^2} = 2a^5;$$

$$\frac{4a^3}{5b^2} \cdot \frac{10b}{5a^2}; \quad \frac{4a^3}{5b^2} : \frac{a^2}{10b}; \quad \frac{2a}{3b} + \frac{5b}{a^2}; \quad \frac{a^2}{6b} - \frac{3}{4ab}.$$

$$2) (a - 2b) \cdot c = ac - 2bc; \quad ac - 2bc = c(a - 2b);$$

$$\frac{ac - 2bc}{c} = \frac{c(a - 2b)}{c} = a - 2b; \quad \frac{ac - 2bc}{a - 2b} = \frac{c(a - 2b)}{a - 2b} = c.$$

Все действия над алгебраическими дробями с соответствующими числителями и знаменателями.

3) Умножение многочлена на многочлен; разложение многочлена на множители группировкой; все действия над алгебраическими дробями с соответствующими членами.

4) Формулы сокращенного умножения и разложения на множители; все действия над соответствующими алгебраическими дробями:

$$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2;$$

$$x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y); \quad \frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y} = x - 2y \text{ и т. п.}$$

Достойна также внедрения в практику методика одновременного изучения взаимно обратных операций на логарифмической линейке и по таблицам (умножение и деление, возведение в квадрат и извлечение квадратного корня, нахождение числа по его логарифму и нахождение логарифма числа, нахождение значения тригонометрической функции по заданному углу и определение угла по значению его тригонометрической функции и т. д.).

<sup>1</sup> Отметим как весьма знаменательное явление то, что в новых программах по математике для начальной и средней школы предусмотрено изучение некоторых групп взаимнообратных задач в одной теме.

Так, в I классе рассматриваются совокупно задачи на сложение и вычитание (прямые и обратные), увеличение и уменьшение числа на несколько единиц, разностное сравнение чисел; во II классе: нахождение доли числа и числа по его доле, в IV классе: раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, в VI классе: разложение на множители и формулы сокращенного умножения [30].

При раз...  
дл. т...  
правила. и г...  
риала. Но т...  
выбрать один...  
и обнаруживае...  
му порознь, они...  
ствующее умение...  
массовые ошибки...  
Иное дело пр...  
мого начала уч...  
ного вида, овлад...  
б. При обуче...  
ные понятия, рас...  
теорема; прямая...  
функция (в частн...  
тригонометрическ...  
ция); периодическ...  
и убывающие ф...  
нения (и их систе...  
ния, неравенства...  
(в тригонометрии...  
метрической фун...  
и обратную проп...  
В связи с этим...  
теорем, применяе...  
шение», 1969). В эт...  
считываются все...  
а затем даны в...  
грамма).  
К тому же авто...  
параграфа не пом...  
признакам паралл...  
свойства паралл...  
В теме «Соотнос...  
§ 30) теоремы дан...  
рема».  
Отсутствие пр...  
тельно сказывается...  
в. Можно сопос...  
как-то: уравнения...  
1 Если по тем нл...  
ок, делательно раздель...  
такая знания, перес...



При раздельном изучении взаимно обратных операций ученики длительное время решают однородные задачи на основе одного правила, и потому создается видимость успешного усвоения материала. Но после того как пройдены обе операции, ученик при решении любой задачи из данных двух типов должен уметь правильно выбрать один из двух возможных вариантов рассуждения. Тут-то и обнаруживается дефект обучения. Пока дети изучали каждую тему порознь, они не встречались с необходимостью выбора и соответствующее умение у них не было выработано. Поэтому и возникают массовые ошибки подмены одного действия другим.

Иное дело при одновременном изучении этих задач: здесь с самого начала ученик рассматривает различие и сходство задач разного вида, овладевает надежными приемами их дифференциации.

б. При обучении математике важно сравнить противоположные понятия, рассматривая их одновременно: прямая и обратная теорема; прямая и противоположная теорема; прямая и обратная функция (в частности, показательная и логарифмическая функция; тригонометрическая функция и обратно тригонометрическая функция); периодические и непериодические функции; возрастающие и убывающие функции; неопределенные и определенные уравнения (и их системы); непротиворечивые и противоречивые уравнения, неравенства (и их системы); прямые и обратные задачи вообще (в тригонометрии: задачи на нахождение угла по значению тригонометрической функции и наоборот; в арифметике: задачи на прямую и обратную пропорциональную зависимость и т. п.<sup>1</sup>).

В связи с этим отметим как неоправданный порядок изучения теорем, применяемый в книге Н.Н. Никитина «Геометрия» «Просвещение», 1969). В этом учебнике в теме «Параллелограмм» сначала рассматриваются все прямые теоремы (свойства параллелограмма), а затем даны все обратные теоремы (признаки параллелограмма).

К тому же автор данного учебника к некоторым теоремам этого параграфа не поместил обратных теорем и, наоборот, отдельным признакам параллелограмма не противопоставил соответствующие свойства параллелограмма.

В теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (§ 30) теоремы даны без названий «прямая теорема» и «обратная теорема».

Отсутствие противопоставления в подобных случаях отрицательно сказывается на развитии логического мышления учащихся.

в. Можно сопоставить родственные или аналогичные понятия, как-то: уравнения и неравенства, арифметические и геометрические.

<sup>1</sup> Если по тем или иным причинам изучение сопряженных вопросов было осуществлено раздельно, полезно сравнить их хотя бы при повторении, систематизации знаний, перестраивая прямую задачу в обратную и наоборот.



кие прогрессии, одноименные законы и свойства действий первой и второй ступени (в арифметике) и т. п.

г. Можно сопоставлять этапы работы над упражнением, способы решения: решение и проверку решения, решение и составление упражнения, графическое и аналитическое решение системы уравнений, аналитический и синтетический способы доказательства теорем, решения задач, аналитический и синтетический способы составления уравнений, неравенств и т. п.

В литературе существует понятие «совместное, или параллельное, изучение разделов математики», под которым разумеют такой порядок, когда взаимосвязанные действия сближаются во времени, но рассматриваются на разных уроках: скажем, один день изучают умножение трех, на следующий день — деление на три (II класс).

Хотя такой вариант и лучше варианта с разрывом изучения взаимно обратных операций на большее время (скажем, на неделю), его нельзя считать осуществлением принципа противопоставления. Термин «одновременное изучение» подчеркивает ту мысль, что между решениями взаимосвязанных примеров или задач (например,  $3 \cdot 4 = 12$  и  $12 : 3 = 4$ ) должно пройти не больше чем несколько минут или даже секунд, а не сутки, причем этот промежуток времени нельзя заполнять какой-либо другой работой мысли.

Разумеется, это вовсе не исключает того, что в отдельных случаях при введении новых трудных понятий может быть целесообразным один-два урока посвятить ознакомлению с содержанием только этого понятия.

Так, например, специально 1—2 урока возможно посвятить введению понятия умножения во II классе (как повторение равных слагаемых) или введению понятия нахождения части числа в V классе.

Однако противоположная операция (деление по содержанию во II классе, нахождение числа по его части в V классе) вводится до закрепления прямой операции; процесс закрепления, выработка навыков применения этих операций лучше всего осуществляются в процессе одновременной работы над обеими операциями.

В этом заключается то принципиально новое, что вносит последовательное осуществление принципа противопоставления.

К сожалению, некоторые авторы при использовании данного эффективного приема непоследовательны; например, в новых учебниках для начальной школы предусмотрено одновременное введение увеличения и уменьшения на несколько единиц (I класс) и ...раздельное введение увеличения и уменьшения в несколько раз (II класс) («Начальная школа», 1968, № 11, стр. 59), в то время как в наших исследованиях была доказана целесообразность одновременного введения указанных понятий и во втором случае [48].

Другие исследователи, правильно указывая на значение связей между понятиями, оказываются непоследовательными при оценке роли временного фактора; так, Л. Н. Занков пишет, что «вовсе не



обязательно, чтобы соответствующие примеры на сложение и вычитание, умножение и деление решались на одном и том же уроке. »[9].

Вопрос об интервале времени между изучением противоположных операций не может иметь однозначного решения. Все зависит от сложности предлагаемых упражнений.

Как известно, доказательство прямой и обратной теоремы (необходимое и достаточное условие) не всегда удастся рассмотреть на одном уроке.

Однако важно помнить следующее: еще до доказательства обеих теорем на первом же уроке полезно сформулировать обе теоремы, записать их символически рядом. Тем самым поневоле будет обеспечено изучение обеих теорем в противопоставлении хотя бы на двух смежных уроках.

Но ведь в традиционном курсе геометрии зачастую поступают по-другому: с начала изучают подряд все прямые теоремы, а через неделю все обратные им теоремы, причем учащиеся так и остаются в неведении относительно связей и различий между взаимно обратными теоремами (например, свойства и признаки параллельных прямых, свойства и признаки параллелограмма и т. п.).

Разумеется, вопрос о границах и своеобразии применения метода противопоставления требует внимательного изучения.

Так, например, лишь после рассмотрения всех частных случаев сложения рациональных чисел (что потребует 1—2 специальных уроков) возможно ввести действие вычитания.

Это вызвано тем, что пример на вычитание, полученный обращением первого случая сложения, решается (через сведение к сложению) на основе четвертого случая сложения.

Однако важно то — это подчеркнем еще раз, — что основную массу упражнений по освоению действий первой ступени над рациональными числами выгодно выполнять сразу на оба действия.

Несомненно, что при детальной разработке метода противопоставления возникнут и будут решены многие иные вопросы методики математики (не только школьной), кроме перечисленных выше, например вопрос об изучении в школе элементов интегрального исчисления в тесной связи с понятиями дифференциального исчисления [60].

Сложившаяся ныне структура изучения математического анализа в институте также насквозь аналитична, как и структура изучения элементарной математики в школе.

Отметим, однако, что мы далеки от мысли рекомендовать везде и всюду применять противопоставление как самоцель.

Для выяснения возможностей применения противопоставлений в тех или иных классах, по тем или иным темам требуется конкретное изучение вопроса, нужны усилия широкого круга учителей; метод противопоставления должен быть разработан в деталях.

Весьма успешным оказался наш опыт построения в пединституте курса лекций по элементарной и аналитической геометрии в



котором все парные, аналогичные предложения, относящиеся к плоскости и пространству, излагались на одном занятии, записывались символически параллельно (геометрические преобразования, геометрические места точек, сходные уравнения прямой и плоскости, линий и поверхностей второго порядка и т. п.).

Наш опыт обучения высшей математике в институте убеждает в действенности данного общедидактического подхода, в возможности существенной рационализации обучения в вузе этим путем.

Так, студенты у нас приучались видеть за одним и тем же уравнением все возможные геометрические интерпретации.

Например, уравнение  $x - 3 = 0$  может означать и точку на оси  $OX$  (геометрия прямой), прямую, перпендикулярную к оси  $OX$  (геометрия плоскости), плоскость, перпендикулярную той же оси (геометрия пространства).

Мы убедились также в эффективности приема сравнения сходных правил и законов при обучении математике в школе, например: изменение суммы и произведения в зависимости от изменения слагаемого и сомножителя; вычитание от числа суммы и деление числа на произведение и т. п.

В заключение отметим, что применение метода противопоставления облегчает усвоение материала, изучается ли сложение и вычитание целых чисел, дробей, комплексных чисел, векторов.

Или: будут ли доказываться теоремы в стиле Евклида или на векторной основе — на основе геометрических преобразований — одинаково важно сравнить прямую и обратную теоремы, необходимо на первом же занятии хотя бы сформулировать обе теоремы.

Введение некоторых понятий теории множеств или математической логики тоже выгодно осуществлять с учетом принципа противопоставления (разумеется, там, где это возможно).

Уже при введении понятий «множество» и «элементы множества» целесообразно на одних и тех же занятиях предлагать задачи прямой и обратной структуры:

Назвать новые элементы определенного множества «животные»: птица, кошка, червь, кенгуру...

Найти название множества по данным его элементам: подсолнух, дуб, ландыш, герань, водоросль, мох.

При изучении понятий «элемент входит в множество» и «элемент не входит в множество» целесообразно также предлагать парные задания:

Найти сократимые дроби, которые сокращаются на 3.

О т в е т.  $\frac{3}{6}, \frac{9}{12}, \frac{15}{18} \dots$

Найти сократимые дроби, которые не сокращаются на 3.

О т в е т.  $\frac{5}{10}, \frac{12}{16}, \frac{7}{21} \dots$

Вот рисунок, к  
(рис. 2).

Изучение понят  
но также осущест

Пусть  $P$  — мно  
делограммов),  $P$  —  
ных параллелограм  
менно равноугольн  
множество всех ро  
в математике нет

Тогда имеем:

Множество  $K$  ес  
ние множеств  $P$  и  
 $K = P \cap$

Оба суждения хо  
Он (а) отриц  
е, найдет наиб



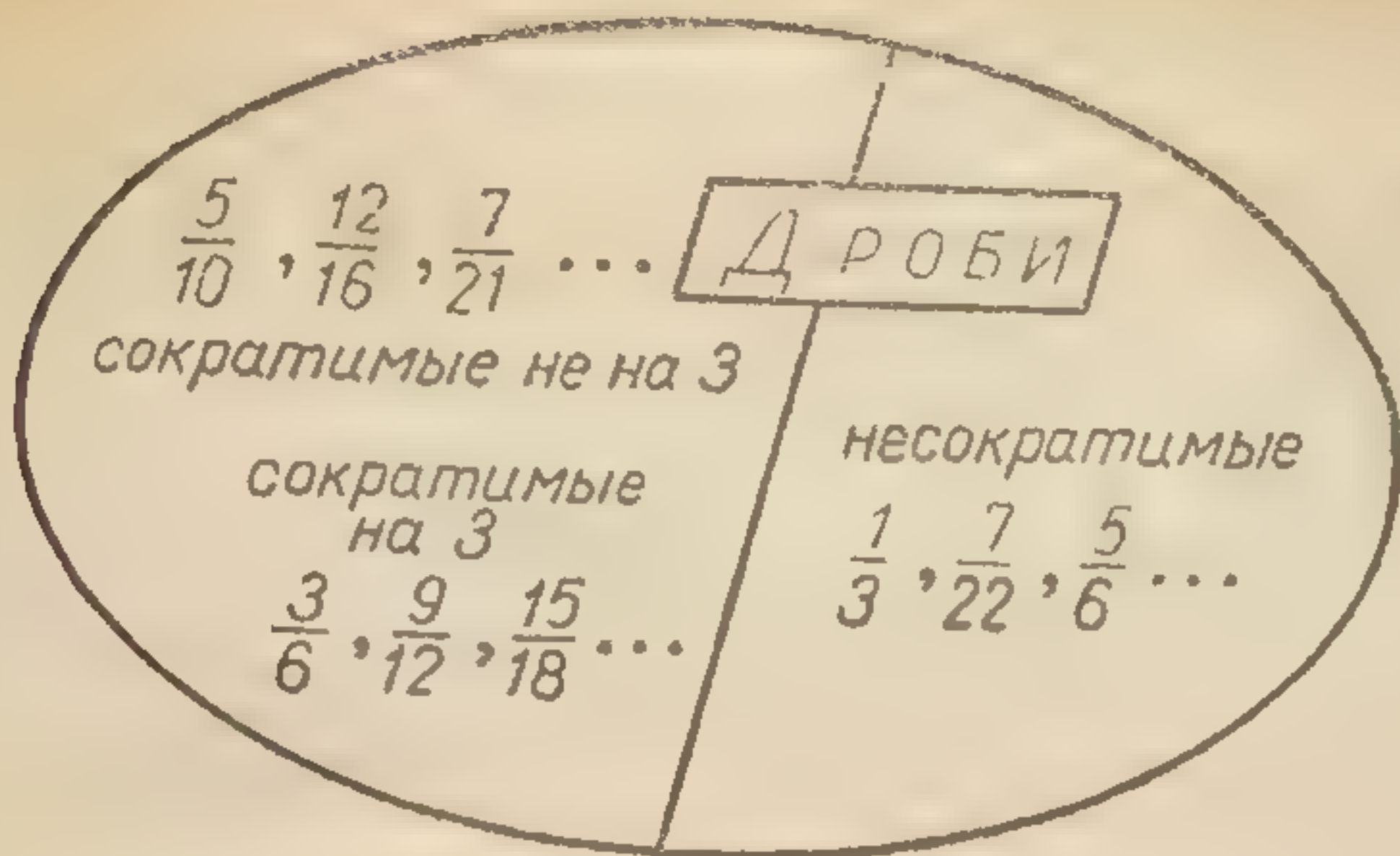


Рис. 2

Вот рисунок, которым можно изобразить ответы на оба вопроса (рис. 2).

Изучение понятий «пересечение» и «соединение» множеств удобно также осуществить в противопоставлении.

Пусть  $P$  — множество всех ромбов (равносторонних параллелограммов),  $\Pi$  — множество всех прямоугольников (равноугольных параллелограммов),  $K$  — множество всех квадратов (одновременно равноугольных и равносторонних параллелограммов),  $C$  — множество всех ромбов и всех прямоугольников. (К сожалению, в математике нет слова-термина, обозначающего это понятие.)

Тогда имеем:

Множество  $K$  есть *пересечение* множеств  $P$  и  $\Pi$ :

$$K = P \cap \Pi.$$

Множество  $C$  есть *объединение* множеств  $P$  и  $\Pi$ :

$$C = P \cup \Pi.$$

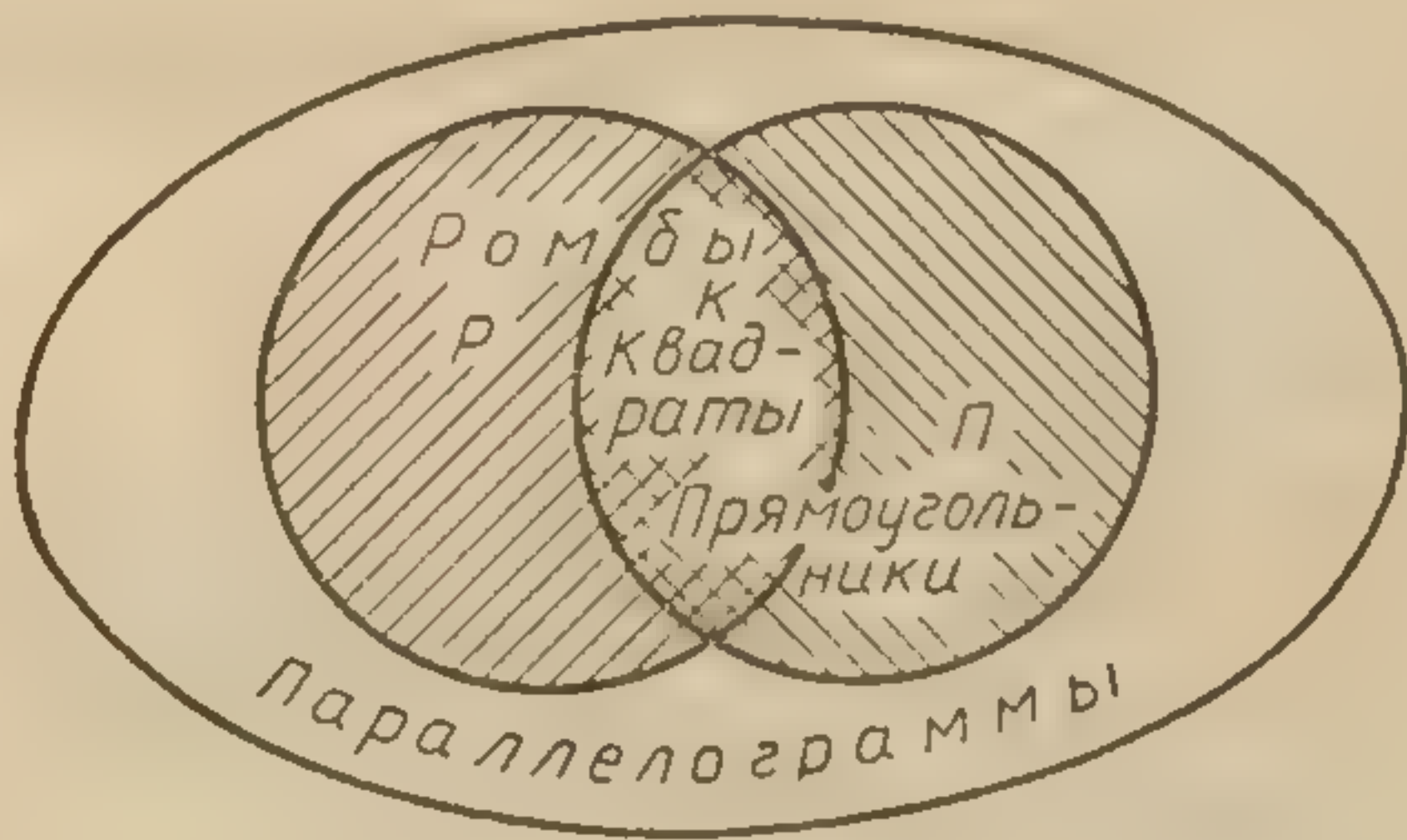


Рис. 3

Оба суждения хорошо иллюстрировать на одном рисунке (рис. 3).  
Операция отрицания, одна из основных в математической логике, найдет наиболее целесообразное применение лишь при со-



поставлении со своим отрицанием, с отрицанием отрицания, т. е. с утверждением.

Обозначим:

$A$  — исходное суждение,

$\bar{A}$  — суждение, отрицающее  $A$  (не  $A$ ),

$\bar{\bar{A}} \equiv A$  (не не  $A$  есть  $A$ ).

В практике обучения важно противопоставлять доказательство утверждением с доказательством посредством опровержения; в итоге возникает у учащихся умение оперировать истинными суждениями как антиподом ложных суждений, и наоборот.

Приведем примеры таких двойственных логических упражнений.

Дано истинное суждение:

$$a = b.$$

Какое соотношение является ложным относительно этих величин?

Ответ.  $a \neq b$ .

Вот еще один пример.

**Прямая теорема**  
Произведение двух четных чисел четно.

Доказательство (утверждением).

Пусть  $2a$  — первое четное число,  $2b$  — второе число. Тогда  $2a \cdot 2b = 2 \cdot 2ab$  — четное число. Теорема истинная.

Дано ложное суждение:

$$x < y \text{ (} x \text{ меньше } y \text{)}.$$

Какое суждение относительно  $x$  и  $y$  является истинным?

Ответ.  $x \geq y$  ( $x$  не меньше  $y$ ; одно из двух: либо  $x$  равно  $y$ , либо  $x$  больше  $y$ ).

**Обратная теорема.**  
Если дано четное число, то оно есть произведение двух четных сомножителей.

Доказательство (опровержением).

Возьмем четное число 4 и нечетное число 7. Их произведение  $4 \cdot 7 = 28$  — четное число. Теорема ложная.

Применение рассматриваемого метода облегчается при освоении таких противоположных операций, как логическое сложение (дизъюнкция) и логическое умножение (конъюнкция).

Пусть решается одно уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x - 2)(x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение распадается на два уравнения, решение каждого из которых удовлетворяет исходному уравнению:

$$(x - 2 = 0) \vee (x + 3 = 0).$$

То есть уравнение имеет два корня:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ .

Пусть решается система уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{aligned} | x - 2 &= 0, \\ | x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Систему можно записать так:  $(x - 2 = 0) \wedge [(x - 2)(x + 3) = 0]$ ,

$$(x_1 = 2) \wedge \begin{pmatrix} x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 2.$$



Можно сказать: уравнение с правой частью, равной нулю, есть дизъюнкция уравнений, полученных приравнением каждого сомножителя нулю. По-другому: множество решений уравнения с правой частью, равной нулю, есть объединение множеств решений всех уравнений, полученных приравнением нулю каждого сомножителя левой части.

Приведем еще пример.

Требуется решить неравенство:

$$(x + 3)(x - 2) < 0.$$

О т в е т.

$$(-3 < x) \wedge (x < 2).$$

Буква  $x$  обозначает одно и то же число в двух неравенствах:

$$-3 < x < 2.$$

Рис. 4, 6.

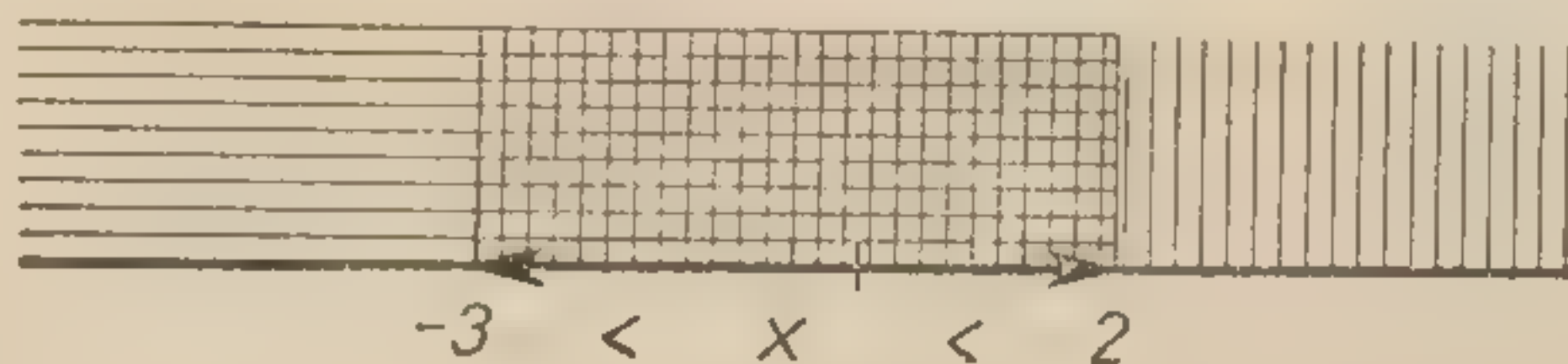


Рис. 4



Рис. 5

Можно сказать: система уравнений есть конъюнкция уравнений, их составляющих.

Иначе: множество решений системы уравнений есть пересечение множеств решений каждого уравнения.

Требуется решить неравенство.

$$(x - 3)(x - 2) > 0.$$

О т в е т.

$$(-3 > x) \vee (x > 2).$$

Буква  $x$  в двух неравенствах может означать и разные числа.

Рис. 5, 6.

На пути противопоставления контрастных понятий могут появиться новые возможности для обозначения структуры упражнений.

Так совместное рассмотрение систем и совокупности неравенств позволяет освоить следующие формулы теории множеств и наоборот:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}.$$



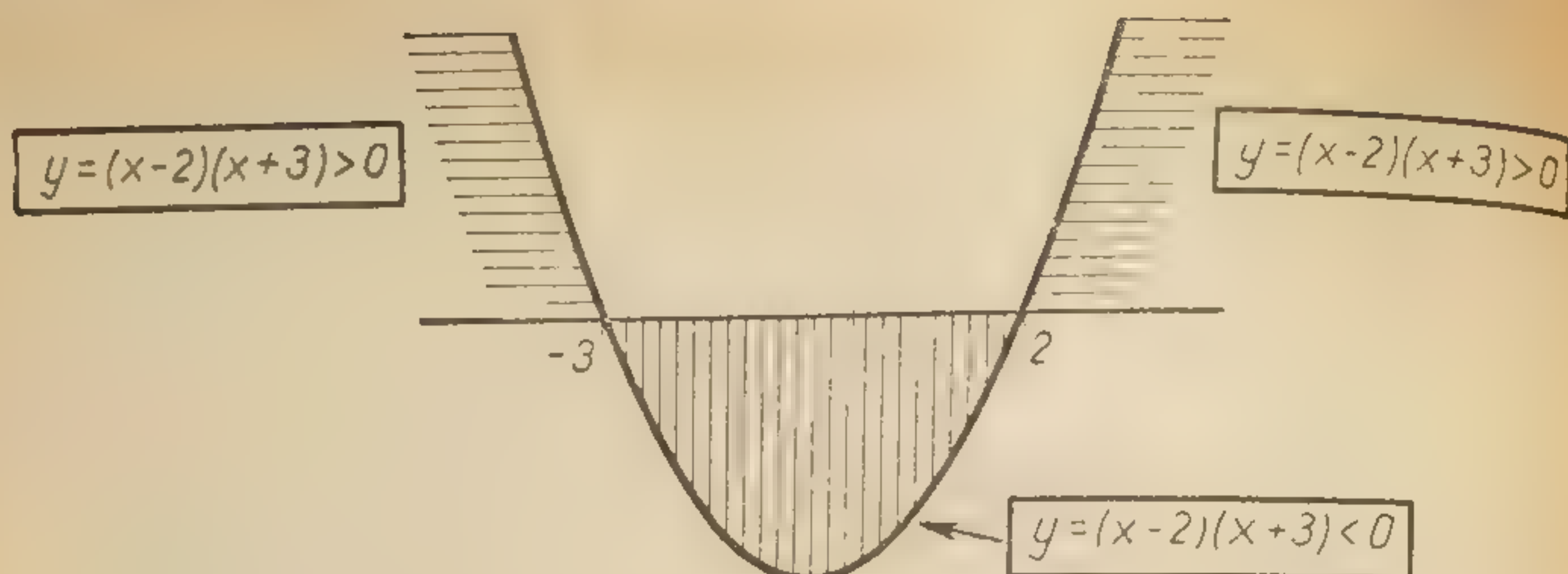


Рис. 6

Используя сопоставления: пересечение множеств ( $\cap$ ) — система неравенств ( $\{$ ), объединение множеств  $\cup$  — совокупность неравенств ( $\}$ ), возможно решить пары взаимосвязанных упражнений:

$$\begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases} \quad \text{Ответ. } x < 1. \quad (A)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x < 3} \\ \overline{x < 1} \end{bmatrix}, \text{ или } \begin{bmatrix} x \geq 3 \\ x \geq 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ответ. } x \geq 1. \quad (\bar{A})$$

## 5. О ЗНАЧЕНИИ ЦИКЛИЧНОСТИ В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

Новейшими исследованиями советских физиологов — учеников И. П. Павлова установлено, что в основе всей психической деятельности находятся циклические, кольцевые процессы, поток информации по замкнутым путям [5].

Характерная особенность кольцевого процесса заключается в том, что он может быть начат с любого звена цепи (цикла) умозаключений и тем не менее привести к проявлению всех элементов и связей цикла.

Анализируя с этих позиций систему математических упражнений, можно обнаружить в них два качественно различных вида.

Структура этих упражнений такова, что при выполнении одних развиваются навыки лишь в прямолнейном применении правил; выполнение других неизбежно связано с осуществлением постоянного контроля, проверки каждой операции, причем последнее нередко становится навыком и осуществляется в подсознании.

Современные школьные упражнения по математике, как правило, имеют именно первую структуру, что, конечно, не является их достоинством.

Например, в сборнике задач для VI класса предлагается решить один за другим набор примеров вида  $(3a - 2b) \cdot (3a + 2b) =$  с постепенным усложнением их.



Характер мыслительных процессов может измениться, если вместо данного примера предложить деформированный пример вида:

$$(\square - 2b) \cdot (\square - 2) = 5a^2 - \dots$$

Проведенные эксперименты говорят, что решение второго примера основывается на поисках недостающих звеньев замкнутого круга умозаключений путем анализа всей цепи, что превращает мыслительный процесс в более сложный, более содержательный и потому лучше развивающий способности ученика.

Такие задания естественным образом развивают навыки самоконтроля, совершающегося непроизвольно и иногда даже неосознанно.

При обычных упражнениях, как известно, самоконтроль очень долго не становится «привычкой», навыком, осуществляемым без напоминания. Причину этого можно усмотреть в том, что решение задачи прямой структуры завершается получением ответа как бы на полувикле и этап контроля, проверки возникает лишь при дополнительном требовании (решить и проверить).

Совсем иное положение при выполнении деформированных упражнений: здесь контроль необходим как часть циклического процесса.

Обращенные задания являются более емкими, чем прямые: выполнение обращенных заданий в большей мере развивает у школьника умение выполнять и прямые преобразования, притом наиболее экономным образом: записан один пример, а в процессе решения его испробовано несколько вариантов, решено в сущности не менее 3—4 примеров.

Этим объясняется повышение активности учащихся при выполнении обращенных заданий и соответственно большая результативность решения этих примеров для усвоения материала.

Нелишне отметить, что к систематизации упражнений до сих пор предъявлялись лишь формальнологические требования, т. е. в большинстве случаев учитывалось усложнение упражнения без качественного изменения его структуры.

Например, по теме «Возведение в степень» на первых уроках алгебры в VI классе предлагаются упражнения в следующей последовательности нарастания трудности:

$$2^3 = ; \left(\frac{4}{5}\right)^3 = ; \left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 = ; (0,5xy^3)^2 = \text{и т. д.}$$

Рассмотрим, можно ли предлагать ученикам того же класса по этой теме упражнения иного характера на определение значения  $x$  в следующих выражениях:

$$x^2 = a^4; \quad x^2 = 9^2; \quad x^2 = 81; \quad x^2 = 9^2a^8; \quad x^4 = 81a^{12}.$$

По форме последнее выражение является уравнением четвертой степени.



Однако шестиклассники успешно и с интересом решают эти уравнения, многократно пробуя и проверяя результаты в уме.

Наш опыт показывает полезность достижения циклической полноты системы упражнений, когда неизвестным искомым элементом последовательно выступает каждый член данного выражения (данной задачи).

Так, шестиклассники справляются и с решением уравнения  $(5a^2)^4 = 125a^4$ , хотя оно по форме является показательным уравнением.

Указанный подход помогает добиться не только разнообразия упражнений, но и ведет к лучшему пониманию и усвоению материала по любой теме курса математики.

Приведем несколько примеров.

1) Пусть изучаются уравнения, приводящиеся к квадратным. Такие уравнения существуют трех видов:

а) Полученные в результате решения уравнения два корня удовлетворяют исходному уравнению. (Уравнению  $|4x - 3| + |6 - 2x| = 3$  удовлетворяют оба корня:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ .)

б) Один из полученных корней удовлетворяет исходному уравнению, другой — нет. (При решении уравнения  $|23 - 7x| - |3x - 2| = 1$  получаются два корня:  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$ , причем последний оказывается посторонним.)

в) Оба значения неизвестного не удовлетворяют исходному уравнению. (Решив уравнение  $|6 - 2x| - |4x - 3| = 3$ , получим:  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ , причем оба значения  $x$  не удовлетворяют условию.)

Если ученики, скажем, не встречались с уравнением последнего вида (что и бывает на самом деле), то их знания по данному разделу нельзя признать полными.

2) При исследовании значений квадратного корня учащиеся выполняют задание следующего вида:

а) Чему равно значение выражения  $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$  при  $a < 3$ .

О т в е т.  $-(a - 3) = 3 - a$ .

б) При каком значении  $m$  верно равенство:

$$\sqrt{m^2 - 4m + 4} = m - 2 \text{ и } \sqrt{m^2 - 4m + 4} = 2 - m?$$

О т в е т.  $m \geq 2$ ;  $m \leq 2$ .

в)  $\sqrt{x} = 1 - c$  при  $c > 1$ .

Определить подкоренное выражение  $x$ .

О т в е т. Нет решения.

3) Пусть выведена следующая зависимость: при основании, большем (меньшем) единицы, большее число имеет больший (меньший) логарифм.

Возможны три вида упражнений, которыми следует воспользоваться, чтобы обеспечить полноту системы упражнений:



а) Сравнить логарифмы чисел 5 и 6 при общем основании, равном 0,6, т. е. определить знак в выражении:

$$\log_{0,6} 6 \quad [?] \quad \log_{0,6} 5.$$

б) Дано:  $\log_{0,6} a > \log_{0,6} b$ .

Какое число больше:  $a$  или  $b$ ?

в) Дано:  $\log_a 5 > \log_a 6$ .

Какое число больше: 1 или  $a$ ? и т. д.

4) В курсе алгебры обычно встречается такая задача на доказательство: «Доказать, что произведение двух нечетных чисел есть нечетное число».

Но лучше предложить вместо нее следующую задачу, в которой достигается полнота рассмотрения вопроса: «Числа от 1 до 100 перемножили попарно с каждым другим числом. Каких чисел среди произведений окажется больше: четных или нечетных? Во сколько раз? Почему?»

Ученик установит всего четыре возможных случая:

четное  $\cdot$  четное = четное;

четное  $\cdot$  нечетное = четное;

нечетное  $\cdot$  четное = четное;

нечетное  $\cdot$  нечетное = нечетное.

Вероятно, навык установления числа частных случаев должен отрабатываться с младших классов и не обязательно на математическом материале.

Сделаем, наконец, одно важное замечание о структурном решении программы.

По традиции алгебраический материал изучается в школе в соответствии с односторонней формальнологической классификацией по разделам: «Уравнения», «Неравенства», «Функции».

Так, после линейных уравнений изучают опять же уравнения (но квадратные); квадратные неравенства изучаются как особая тема после квадратных функций и т. д.

Приведем в данной связи весьма характерный факт.

На основе анализа материалов приемных экзаменов в Ленинградский педагогический институт имени Герцена председатель экзаменационной комиссии Л. Компанийц, учитель С. Негинский в статье «О чем говорят тысячи ответов» пишут: «...многие запутываются — смешивают понятия «квадратный трехчлен», «квадратное уравнение», «парабола»; видно, до сих пор дает себя знать пережиток тех лет, когда функция, уравнение и неравенство изучались как изолированные темы» («Учительская газета» от августа 1967 г.).

Нам остается отметить, что здесь правильно квалифицируется указанный структурный недостаток программы как причина разрозненности знаний, не связанных в свое время дидактическими средствами в единую систему знаний.



Данный случай говорит о том, как нередко «чисто логический» (или «чисто математический») подход оказывается несостоятельным при решении вопросов о рациональной структуре программы.

Экспериментальное обучение показало существенные преимущества иной системы, когда материал располагается в виде развертывающейся спирали, причем каждый виток (цикл) спирали образует внутренне целостную тему и изучается в одном классе.

Скажем, пройдя цикл «тождества, приводящие к линейному уравнению  $\rightarrow$  линейное уравнение  $\rightarrow$  линейное неравенство», мы возвращаемся на следующем витке опять к уравнению, но качественно иному, квадратному, сводящемуся к совокупности двух линейных уравнений:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{(\boxed{4}-1)(\boxed{4}+2)=18} & \dashrightarrow & \boxed{(x-1)(x+2)=18} & \leftrightarrow & \boxed{(x-1)(x+2)\geq 12} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{2\cdot\boxed{3}-5=1} & \longleftrightarrow & \boxed{2x-5=1} & \dashrightarrow & \boxed{2x-5\geq 0} \end{array}$$

При таком структурном решении последовательности тем появляется возможность овладеть предметом в его становлении; так, свое место находит здесь и исходное понятие каждого цикла — тождество.

Становится понятным и значение решения комплексных упражнений вида  $2x + 3 \geq 11$ , а большей частью вида  $ax + b \leq c$ .

Таким образом цикл должен выступать элементарной неделимой единицей в структуре программы: если изучено, скажем, в VI классе умножение одночленов и многочленов, то разложение на множители вынесением за скобки и все простейшие операции над дробями, связанные с этими двумя операциями, должны рассматриваться в той же теме, в том же классе; точно так же линейные уравнения, линейные неравенства и исследование линейных функций логично включить в один цикл, изучать их совмещенно и т. п.

Расширение или сокращение программы допустимо лишь по циклам.

## 6. О МЕСТЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Одной из характерных особенностей предлагаемой системы обучения является так называемый метод обратных задач. Этот метод означает, что работу над задачей нецелесообразно завершать получением ответа к ней, а приемом обращения составлять и решать в сопоставлении с исходной (прямой) задачей новую задачу, обратную задаче, извлекая тем самым дополнительную информацию, заключающуюся в новых связях между величинами исходной задачи.

Для этого з  
торые числа из  
В арифметичес  
различать три э  
1) сюжетную сто  
2) числовые дан  
3) математическ  
рых решается зад  
Существенным э  
(вид) задачи, слож  
В сборнике зада  
сюжеты и числа, с  
мости.

Это приводит к  
находятся только  
оказываются при эт  
риваются отдельно  
Обратные задачи  
ний, используемых,

Рассмотрим зада  
а) Написать ряд  
любое число; второ  
2 раза; третье полу  
Иначе: член ряда  
за:  $(a_{2p} = a_{2p-1} \cdot 2)$ ;  
щего на 2:  $(a_{2p+1} =$   
22, 44, ...

Наблюдения по  
нений обратной стр  
б) Даны 6 члено  
2 члена.

Впрочем, задани  
гом смысле слова:  
первом ряду увели  
ряду на 3 и в 3 р  
Остановимся по  
ческих особенносте

Рассмотрим зад  
В первый день с  
2 раза больше, чем  
меньше, чем во вто  
день?

Решение.  
1)  $30 \cdot 2 = 60$   
2)  $60 - 15 = 45$



Для этого в условии исходной задачи задается ее ответ, а некоторые числа из условия переводятся в ряд искомого.

В арифметической или алгебраической задаче целесообразно различать три элемента:

- 1) сюжетную сторону (например, задачи на движение);
- 2) числовые данные (скажем, десятичные дроби);
- 3) математические зависимости и действия, посредством которых решается задача.

Существенным элементом, от которого зависит в основном тип (вид) задачи, сложность ее решения, является третий элемент.

В сборнике задач при подборе упражнений варьируют обычно сюжеты и числа, сохраняя неизменными математические зависимости.

Это приводит к тому, что в той или иной группе задач часто находятся только однотипные; взаимно противоположные задачи оказываются при этом в различных частях задачника и рассматриваются отдельно друг от друга.

Обратные задачи уместно вводить начиная с элементарных заданий, используемых, скажем, для проверки сообразительности.

Рассмотрим задание.

а) Написать ряд чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  так: на первом месте — любое число; второй член получить из первого, увеличив его в 2 раза; третий получить из второго, увеличив его на 2, и т. д.

Иначе: член ряда с четным членом больше предыдущего в 2 раза:  $(a_{2p} = a_{2p-1} \cdot 2)$ ; член ряда с нечетным членом больше предыдущего на 2:  $(a_{2p+1} = a_{2p} + 2)$ . Вот один такой ряд: 1, 2, 4, 8, 10, 20, 22, 44, ...

Наблюдения показывают гораздо большую трудность упражнений обратной структуры.

б) Даны 6 членов ряда: 4, 7, 21, 24, 72, 75, ... . Дописать еще 2 члена.

Впрочем, задания а и б не являются взаимно обратными в строгом смысле слова: здесь используются разные параметры (если в первом ряду увеличение происходит на 2 и в 2 раза, то во втором ряду на 3 и в 3 раза).

Остановимся подробнее на анализе логических и психологических особенностей метода обратных задач.

Рассмотрим задачу.

В первый день скосили 30 га посевов, во второй день скосили в 2 раза больше, чем в первый день. В третий день скосили на 15 га меньше, чем во второй день. Сколько гектаров скосили в третий день?

Решение.

- 1)  $30 \cdot 2 = 60$  (га);
- 2)  $60 - 15 = 45$  (га).



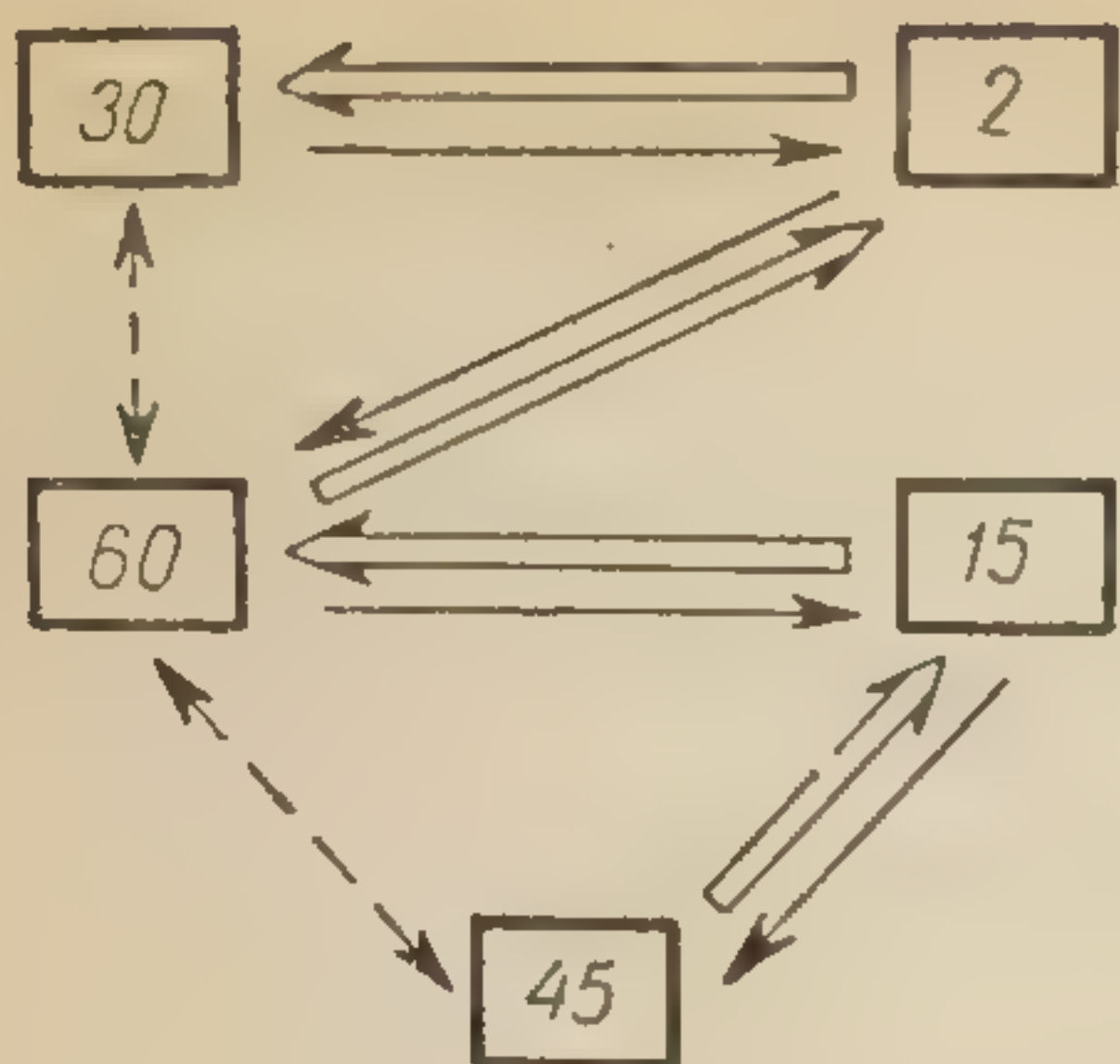


Рис. 7

Составим теперь обратную задачу по схеме:  $\square$ ; в 2 раза, 15 га, 45 га.

В первый день скошили несколько гектаров, во второй — в 2 раза больше, чем в первый, в третий — на 15 га меньше, чем во второй день. Сколько гектаров скошили в первый день, если в третий день скошили 45 га?

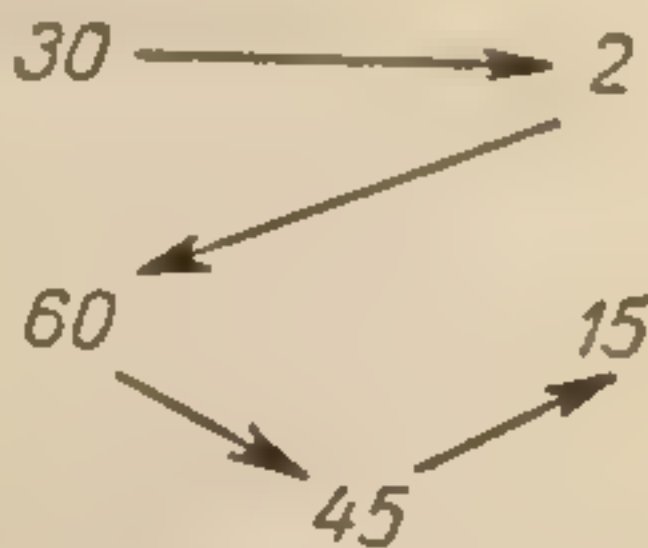
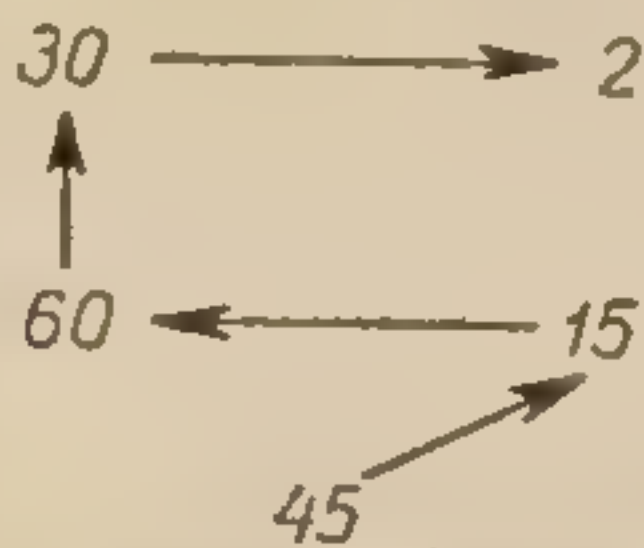
Решение.

- 1)  $45 + 15 = 60$  (га);
- 2)  $60 : 2 = 30$  (га).

Схематически процессы решения данных взаимно обратных задач представлены на рисунке 7.

На этой схеме решение прямой задачи изображено цепью сплошных стрелок, а решение обратной задачи — двойными стрелками.

Чтобы последние связи были еще более упрочены, осмыслены, выданы на высшем коде, надо решить две другие обратные задачи, которым соответствуют следующие цепи связей:



Успех обучения решению задач посредством преобразования прямой задачи в обратную объясняется прежде всего тем, что такой путь устанавливает разнообразие связей, заключенных в содержании задачи.

Обратим внимание на следующие особенности решения взаимно обратных задач (не только по арифметике).

а) При этой методике одно и то же число, понятие, величина, фигура и т. п. входит в несколько различных связей, находится существенно иными ходами мысли.

Так, в рассмотренном примере число 60 в прямой задаче находится как произведение ( $30 \cdot 2 = 60$ ), а при решении обратной задачи это же число получается как сумма ( $45 + 15 = 60$ ).

Говоря по-другому, в прямой задаче число 60 выступает как результат увеличения числа в несколько раз; в обратной задаче число 60 выступает результатом увеличения числа на несколько единиц.

б) В процессе преобразования прямой задачи в обратную учащийся выявляет и использует взаимно обратные связи между величинами задачи: если в прямой задаче, скажем, определялась стои-



мость по цене товара, то в обратной задаче определяется цена или количество товара.

в) Решая обратную задачу, учащийся перестраивает суждения и умозаключения, использованные при решении прямой задачи. При этом учащиеся овладевают практически как новыми связями между мыслями, так и новыми, более сложными формами рассуждений.

Таким образом, ценны для развития мышления не столько прямые и обратные задачи, взятые сами по себе, а наиболее важный познавательный элемент заключается в процессе преобразования одной задачи в другую, т. е. в тех «невидимых», трудноуловимых и трудноизобразимых при логическом анализе элементах мысли, которые связывают процессы решения обеих задач.

г) Важно отметить и другую структурную особенность подобных комплексных упражнений: совокупность пары прямой и обратной задач, каждая из которых есть, скажем, задача в 2—3 действия, в дидактическом плане есть нечто отличное, чем две отдельные задачи в 2—3 действия; по существу это единое, качественно новое упражнение, одна задача в 4—6 действий; вторая часть такого сложного упражнения целиком выступает продуктом творчества учащихся, будучи структурным продолжением первой части.

Как показывает наша практика, целесообразно распространить понятие «обратная задача» на случаи типовых арифметических или алгебраических задач, когда не одно, а 2—3 числа из ответа замещают столько же чисел, данных в условии исходной задачи.

Рассмотрим в качестве примера задачу на нахождение двух чисел по их разности:

*В мастерской Катя сшила 3 платья, а Нина — 12 таких платьев. Поэтому Нина израсходовала ткани на 36 м больше, чем Катя. Сколько метров ткани израсходовала каждая из них в отдельности?*

Если ответ задачи (числа 48 м и 12 м) ввести в условие задачи, а соответствующие числа 12 пл. и 3 пл. сделать искомыми, то мы получим обратную задачу того же типа.

Условия задач и их решения удобно записать рядом в следующей схеме:

Прямая задача.

Нина — 12 пл. ☐

Катя — 3 пл. ☐

Больше на 36 м

Решение.

1)  $12 - 3 = 9$  (пл.);

2)  $36 : 9 = 4$  (м);

3)  $4 \cdot 12 = 48$  (м);

4)  $4 \cdot 3 = 12$  (м).

Проверка.

$48 \text{ м} - 12 \text{ м} = 36 \text{ м}.$

Обратная задача.

Нина ☐ 48 м

Катя ☐ 12 м

9 пл.

Решение

1)  $48 - 12 = 36$  (м);

2)  $36 : 9 = 4$  (м);

3)  $48 : 4 = 12$  (пл);

4)  $12 : 4 = 3$  (пл.).

Проверка.

$12 \text{ пл.} - 3 \text{ пл.} = 9 \text{ пл.}$



Дополнительно к ранее сказанному о решении взаимно обратных задач в тесной связи друг с другом приведем еще несколько примеров, конкретизирующих практические рекомендации по использованию данного метода.

По действующей программе рассматриваются примеры устного умножения на 5, 50, 25, но не изучаются способы деления на эти же числа.

Между тем именно противопоставление двух взаимно обратных действий является весьма полезным для развития мышления (безотносительно к тому, письменно или устно выполняются эти действия).

В задачнике А. С. Пчелко и Г. Б. Поляка даны только прямые задачи на среднее арифметическое, все обратные к ним задачи перенесены в другие разделы математики.

В программах восьмилетней школы после изучения функции  $y = x^2$  рассматривается функция  $y = \sqrt{x}$ , но последняя не представляет полностью обратной функции ( $y = \pm \sqrt{x}$ ).

Вследствие этого оказалось невозможным ввести в восьмилетней школе понятие об обратной функции и использование важного геометрического преобразования — вращения графика вокруг биссектрисы первого и третьего координатных углов<sup>1</sup>.

Приведенный перечень необходимых корректив существующего порядка изучения математики можно продолжить и далее.

Важно то, что понятие «обратная задача» позволяет с некоторой общей позиции подойти к распределению материала по классам.

Прием составления новых задач, обратных данным, является универсальным: он применим для любых разделов математики и всегда приводит ученика к постановке новых проблем, получению существенно иных разновидностей задач. Умение решать прямую и обратную задачи является важным показателем достигнутой учеником глубины понимания изучаемого раздела математики.

Имеет поэтому смысл рассматривать в методике математики составление и решение обратных задач как важный и удобный прием развития творческого мышления учащихся.

В старших классах школы этим путем удастся выяснить содержание логических категорий «необходимые и достаточные условия».

Рассмотрим несколько характерных примеров.

1а. Дано уравнение первой степени  $5x - 2a = ax - 3$ . Требуется определить область изменения параметра  $a$ , если данное уравнение имеет решение:  $2 < x < 8$ .

О т в е т.  $3,25 < a < 4,3$ .

1б. О б р а т н а я з а д а ч а. В уравнении  $5x - 2a = ax - 3$  параметр  $a$  изменяется на промежутке  $3,25 < a < 4,3$ . Определить

<sup>1</sup> На данной ступени обучения противопоставление однозначной прямой функции  $y = x^2$  и двузначной обратной функции  $y = \pm \sqrt{x}$  методически оправдано (подобно функциям  $y = \sin x$  и  $y = \text{Arc} \sin x$ ).



соответствующую область изменения значений корня. Ответ.  
 $2 < x < 8$ .

Решение данной пары задач показывает, что изменение корня ( $x$ ) линейного уравнения на определенном промежутке является необходимым и достаточным условием для изменения параметра ( $a$ ) на соответствующем промежутке.

2а. Пусть решена следующая задача на неравенства:

В каком промежутке должно изменяться число  $m$ , чтобы оба корня уравнения  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$  были заключены между  $-2$  и  $4$ ?

Ответ:  $-3 < m < 5$ .

Интересно рассмотреть обратную задачу.

2б. Дано уравнение  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ .

В каких пределах будут изменяться корни уравнения, если параметр  $m$  изменяется в пределах  $-3 < m < 5$ .

Решив вторую пару задач, можно убедиться, что здесь необходимое условие отнюдь не совпадает с достаточным условием.

3а. Если  $a^2, b^2, c^2$  составляют арифметическую прогрессию, то числа  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  составляют тоже арифметическую прогрессию ( $a, b, c$  — числа положительные).

3б. Обратная задача. Если  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  составляют арифметическую прогрессию, то числа  $a, b, c$  тоже составляют арифметическую прогрессию.

4. Найти условие, необходимое и достаточное, чтобы корни уравнения  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  образовали геометрическую прогрессию.

(Данная задача помещена под № 729 в «Сборнике задач по математике» К. С. Барыбина и А. К. Исакова, причем в решении ошибочно отождествлены необходимое и достаточное условия.)

Мы проанализировали выше процесс преобразования прямых арифметических задач в обратные. Столь же логически содержательным и дидактически эффективным оказывается метод обратных задач применительно к геометрии и другим учебным предметам, где встречаются вычисления и математические рассуждения.

Рассмотрим несколько простых суждений.

Прямая теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Обратная теорема. Дуга окружности измеряется удвоенным вписанным углом, опирающимся на эту дугу.

Указанная прямая теорема изучается в школе, а обратная — нет; тем не менее последняя используется при решении задач на вычисление столь же часто, как и прямая.

Как показывает наша практика, большинство учеников не могут самостоятельно из первого предложения вывести второе: как и вообще в подобных случаях в математике, прямая связь



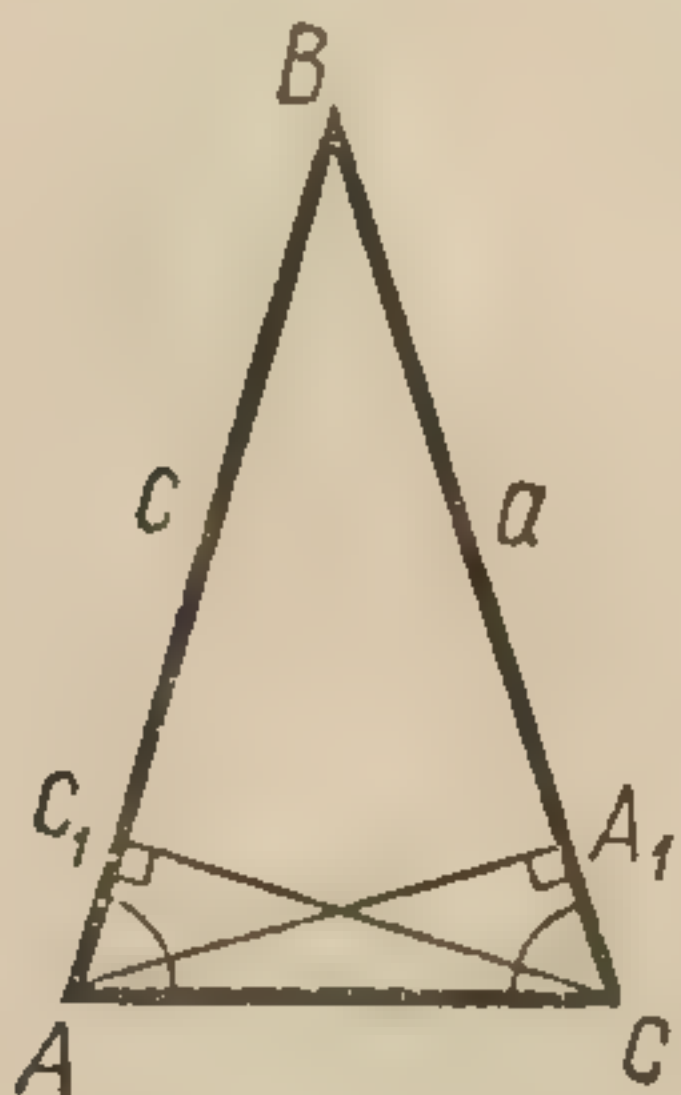
вида «вписанный угол  $\rightarrow$  дуга» не перерастает автоматически в обратную связь вида «дуга  $\rightarrow$  вписанный угол».

Чтобы достичь возникновения циклической связи вида «дуга  $\rightarrow$  угол  $\rightarrow$  дуга», необходимо использование при обучении геометрии (как и вообще математике) приема преобразования геометрических предложений в обратные с последующим сравнением исходной и производной мыслей и исследованием их истинности.

Рассмотрим далее следующие взаимно обратные теоремы:

**Прямая теорема (П).**  
В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.

**Обратная теорема (О)**  
Если в треугольнике равны две высоты, то этот треугольник равнобедренный.



Прямая теорема

Дано:  $a = c$

Обратная теорема

$AA_1 = CC_1$

$AA_1 \perp BC$

$CC_1 \perp AB$

Доказать:

$AA_1 = CC_1 \mid a = c$

Доказательство:

$a = c$

$\angle A = \angle C$

$\triangle A_1CA_1 = \triangle C_1AC_1$

$CC_1 = AA_1$

$AC = AC$

Рассмотрим внимательно особенности доказательства данных взаимно обратных теорем.

В этих целях построим цепь силлогизмов, т. е. умозаключений, имеющих следующую структуру:

Большая посылка. а)  $K$  есть  $P$ .

Малая посылка. б)  $M$  есть  $K$ .

Заключение. в) Значит,  $M$  есть  $P$ .



П<sub>1</sub>. а) В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

б) В  $\triangle ABC$  против стороны  $c = AB$  лежит угол  $C$ ; против равной ей стороны  $a = BC$  лежит угол  $A$ .

в) Значит,  $\angle C = \angle A$ .

П<sub>2</sub>. а) Если гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то треугольники равны.

б) В  $\triangle ACA_1$  и  $\triangle CAC_1$   $AC$  — общая гипотенуза;  $\angle A = \angle C$ .

в) Значит,  $\triangle ACA_1 = \triangle CAC_1$ .

П<sub>3</sub>. а) В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

б) Против угла  $A$  в  $\triangle CAC_1$  лежит сторона  $CC_1$ , а против равного ему угла  $C$  в равном треугольнике  $ACA_1$  лежит сторона  $AA_1$ .

в) Значит,  $CC_1 = AA_1$ .  
Что и требовалось доказать.

О<sub>1</sub>. а) Если гипотенуза и катет одного треугольника равны гипотенузе и катету другого треугольника, то эти треугольники равны.

б) В прямоугольных треугольниках  $ACA_1$  и  $CAC_1$  имеются:  $AC$  — общая гипотенуза;  $AA_1 = CC_1$  (по условию).

в) Значит,  $\triangle ACA_1 = \triangle CAC_1$ .

О<sub>2</sub>. а) В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

б) Против стороны  $AA_1$  в  $\triangle AA_1C$  лежит угол  $C$ , а против равной ей стороны  $CC_1$  в равном треугольнике  $CAC_1$  лежит угол  $A$ .

в) Значит,  $\angle C = \angle A$ .

О<sub>3</sub>. а) В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

б) В  $\triangle ABC$  против угла  $A$  лежит сторона  $a = BC$ , а против равного ему угла  $C$  лежит сторона  $c = AB$ .

в) Значит,  $a = c$ .

Что и требовалось доказать.

На схеме показано, как можно добиться краткой и емкой записи доказательства, когда каждая стрелка (переход от строки к строке) характеризует силлогизм, причем доказательства обеих теорем совмещены в одной записи. При таком способе фиксации информации знаки импликации (стрелки) предельно наглядно изображают отличие и сходство процессов доказательства прямой и обратной теорем.

Сходство. В обоих доказательствах используется одна и та же совокупность понятий и даже суждений.

Различие. Суждение, носившее логическую функцию основания в доказательстве прямой теоремы, становится следствием в обратной теореме, и наоборот.



### Пример из физики.

#### Прямая задача

Найти общее сопротивление двух параллельно соединенных проводников сопротивлением 3 ом и 6 ом. [51].

Решение.  $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ .

Ответ.  $x = 2$  (ом).

#### Обратная задача

Общее сопротивление двух параллельно соединенных проводников составляет 2 ом. Сопротивление одного из них 3 ом. Найти сопротивление второго проводника.

Решение.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{6}.$$

Ответ.  $y = 3$  (ом).

### Пример из химии.

#### Прямая задача

Сколько железа содержится в 200 г  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ?

#### Обратная задача

При анализе окиси железа обнаружено, что железа в ней содержится в 2,1 раза больше, чем кислорода. Написать формулу окиси [50].

Проблема внедрения творческих упражнений, в частности метода обратных задач, будучи проблемой не столько математической, сколько психолого-дидактической, не успела стать объектом внимания авторов учебников как для начальной и средней, так и тем более для высшей школы.

### 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. ЕДИНИЧНЫЕ И МНОЖЕСТВЕННЫЕ СВЯЗИ

Тренировочные упражнения по математике в настоящее время почти все состоят из определенных задач, имеющих одно решение. А между тем решение неопределенных задач (имеющих множество решений), будучи связано с развитием способности к нахождению различных вариаций, представляет не менее важный вид упражнений, содержащих элементы творчества.

Проникновению в школу неопределенных упражнений, рассчитанных на развитие комбинационных способностей учеников, мешает иногда традиция.

Например, в книге Дж. Юнга, в свое время широко распространенной среди учителей, утверждалось, что «неопределенный результат не имеет никакой цены, а неопределенная задача даже хуже полного отсутствия задачи» [61, стр. 144].



Пусть требуется решить следующий деформированный пример:  $(? + ?)(? - 2xy + ?) = ? + ?$ , причем известно, что произведение неизвестных сомножителей является суммой кубов.

Последнее задание — пример неопределенного упражнения, где особое место приобретает интерполяция суждений, ибо решение его связано с возможностью представить средний член (второго множителя) в различных видах:

$$2xy - \begin{cases} -2 \cdot xy \\ -2x \cdot y \\ -x \cdot 2y \text{ и т. п.} \end{cases}$$

При решении этого примера возникает пучок связей (ассоциаций) и соответственно могут быть получены различные ответы:

$$(2 + xy)(4 - 2xy + x^2y^2) = 8 + x^2y^3;$$

$$(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) = 8x^3 + y^3;$$

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + 8y^3 \text{ и т. п.}$$

Проследим внимательно хотя бы за движением взгляда ученика, выполняющего такое неопределенное задание. Хорошо видно, как он многократно «считывает» зрительным лучом информацию, содержащуюся в обеих частях тождества, попеременно перемещая взор слева направо и справа налево.

Эта наблюдаемая внешняя картина говорит о сложных психических процессах, происходящих в мозгу учащегося при решении такого неопределенного задания: сознание ученика при этом непрерывно корректирует получаемые выражения.

Имеются основания утверждать, что такие задания заметно влияют на развитие критического мышления, учат совершать промежуточные выводы, отличать верное от неверного, предполагать искомое и проверять его соответствие условиям.

Короче говоря, выполнение неопределенного упражнения гораздо содержательнее обычных заданий по богатству логических приемов, используемых при этом.

Хорошим приемом развития множественных связей является также упражнение по составлению учащимися нескольких задач, уравнений, неравенств и даже примеров и т. п., имеющих те или иные общие элементы.

Активные методы обучения, соответствующие (адекватные) общим структурам математики как науки, сохраняют свою действенность при изучении многих ее разделов.

Поэтому важной проблемой современной дидактики становится перенос эффективных приемов обучения из начальной школы в среднюю, а из средней — в высшую.

Сравним следующие упражнения:

1) Составить задачу, решение которой можно записать так:  $(\square + \square) : 2 = 8$  (II класс).



2) Составить систему двух линейных уравнений, чтобы решением ее были числа:  $x = 2$ ,  $y = -3$  (VII класс).

3) Составить дифференциальное уравнение и наметить начальные условия так, чтобы его частными интегралами были функции вида  $y = x^2 - bx + 10$  (III курс пединститута).

Все эти задания неопределенны: каждый учащийся принесет уравнение именно свое, неповторяющееся.

Структурно-противоположные задания по решению арифметической задачи в два действия (II класс), системы линейных уравнений (VII класс) или готового дифференциального уравнения (III курс) общеизвестны, они повторяются в любом задачнике.

Дело, конечно, не в повторении, как таковом, а в нарушении меры, когда очередное упражнение перестает уже нести новую информацию.

Рассмотрение неопределенных заданий вызывает интерес учащихся и способствует более сознательному усвоению материала.

И все же с сожалением приходится признать, что в практике обучения математике неопределенные упражнения еще не получили достойной оценки и распространения<sup>1</sup>.

## 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО — ОДНА ИЗ ФОРМ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Проблема развития самостоятельности мышления учащихся в процессе обучения математике является острой, еще не разрешенной проблемой методики математики.

Анализ характера умственной деятельности учеников на различных уроках, в разных классах показал, что лишь 15—20% учебного времени тратится на самостоятельную работу, при этом чем старше класс, тем самостоятельных работ меньше.

Создается ненормальное положение: с возрастом учащиеся, конечно, становятся более способными к самостоятельной работе, а им предоставляют для этого все меньше возможностей.

В литературе понятие «самостоятельность» толкуют часто нечетко, основываясь лишь на внешней стороне деятельности учащихся.

Ученик может без помощи учителя решить тот или иной готовый пример или задачу, например установить делимость данного многочлена на  $(x - 2)$ , пользуясь теоремой Безу.

Однако характер мышления ученика изменяется коренным образом, если ему предложить, скажем, составить четырехчлен седьмой степени, делящийся на  $(x - 2)$ .

<sup>1</sup> Отметим как приятное исключение книгу В. В. Рассохина и Н. А. Целинского, в которой отмечено важное значение неопределенных задач для занятий по черчению [32].



Если в числе тренировочных упражнений преобладают однотипные, при решении которых ученик ограничивается лишь получением ответа и сверкой его с готовым ответом, то такие упражнения не направляют усилия ученика на разрешение иных нешаблонных заданий, с чем ему придется встречаться в жизни.

Знания ученика будут прочными, если они приобретены не одной памятью, не заучены механически, а являются продуктом собственных размышлений и закрепились в результате его собственной творческой деятельности над учебным материалом.

Эту важную роль самостоятельности мышления для дальнейшего приобретения и применения знаний отмечают наши известные ученые.

Так, академик С. Струмилин в своих воспоминаниях пишет, что сначала он решал содержащиеся в журнале задачи, а затем сам стал корреспондентом журнала, отсылая туда самостоятельно составленные задачи и теоремы. «И хотя это было еще весьма скромное творчество, — заключает он, — но все же его я считаю началом научной самодеятельности» [37, стр. 38].

Характерен в этом смысле также стиль работы над новым материалом профессором Я. А. Хинчина; он писал, что для него лучшей формой усвоения нового является самостоятельный вывод того или иного результата и по возможности путем, отличным от изложенного в книге.

Академик А. Н. Колмогоров указывает, что даже «простейшие математические знания могут применяться умело и с пользой лишь в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно» [14, стр. 3].

Творческое мышление есть высшая ступень самостоятельности; иначе говоря, не всякую самостоятельную работу можно назвать творческой работой.

При обсуждении вопросов обучения математике весьма важно учитывать то, что решение учениками предложенной задачи и составление ими аналогичной задачи в каком угодно классе суть процессы диалектически противоречивые, ибо применяемые в них формы анализа-синтеза коренным образом различаются.

Отшлифованное доказательство той или иной теоремы, краткое изложение решения задачи — это суть постройки без лесов; мыслящий разум должен познать и извилистый путь, который привел к теореме (задаче).

Не случайно Леонард Эйлер полагал, что, кроме описания результатов своих исследований, обогативших науку, ему надобно для общей пользы чистосердечно изложить еще и процесс искания истины со всеми его зигзагами и затруднениями.

Действующие учебники математики мало чем могут помочь развитию творческих начал: в нем, по меткому выражению профессора Б. В. Гнеденко, спрятаны все концы, дана уже готовая схема,



знания представлены в статическом состоянии, в завершенных формах.

Относительно так называемых творческих упражнений существуют в методике две крайности.

Одни полагают, что обычно ученик не может сам ставить перед собой проблему. Отсюда делают вывод, что в школьных условиях уже достаточно, если ученик сможет решить готовую задачу, предложенную ему учителем.

К. Э. Циолковский писал, что сначала он делал открытия, известные всем, затем известные немногим и, наконец, никому не известные.

Обучение математике в школе вполне можно и нужно строить так, чтобы оно казалось для учащегося серией маленьких открытий.

По любому разделу математики можно сконструировать такое синтетическое упражнение, выполнение которого действительно содержало бы элементы творчества.

Пусть пятикласснику предложено деформированное число 35.6. Требуется добавить в середине две цифры так, чтобы число разделилось без остатка на 9.

Ход мыслей ученика примерно таков:

«Найду сумму имеющихся цифр  $3 + 5 + 6 = 14$ . Ближайшее к 14 число, делящееся на 9, это — 18, следующее 27.

Не хватает 4 ( $18 - 14 = 4$ ). Две цифры надо подобрать так, чтобы их сумма была равна 4». Возможны варианты: 4 и 0; 3 и 1; 2 и 2. Во второй группе вариантов сумма двух недостающих цифр должна составить  $13 = 4 + 9 = 27 - 14$  (4 и 9; 5 и 8; 6 и 7 и т. д.).

«Сколько же разных решений можно найти?» — спрашивает учитель.

Коллективно исчерпываются все возможные варианты для первой группы: 35 406, 35 046, 35 316, 35 136, 35 226, а затем и для второй.

Такая работа основывается не на прямолинейном применении правила (установления того, делится или не делится данное число на 9), а идет необычным путем.

Размышляя и опираясь на правило, ученик в этом случае встречается и с комбинаторикой, и с перечислением всех возможных решений.

Это несомненно математическое творчество, пусть и элементарное.

Различные синтетические упражнения по составлению уравнений, задач и т. п. обладают для учащихся качествами новизны и оригинальности полученных результатов; поэтому есть все основания отнести подобные упражнения к творческим.

Нельзя также согласиться с другой крайностью, с ограниченным толкованием понятия математического творчества учащихся, когда под ним разумеют только изящное, чем-то необычное, отличное от стандартного приема решение готовой задачи.



Конечно, нельзя отрицать наличия элементов творчества и в такой преимущественно аналитической деятельности, но важно учитывать при обучении следующее положение.

Творчество (какое бы оно ни было — техническое, музыкальное, математическое и т. д.) всегда означает созидание, синтез чего-то существенно нового; не может быть настоящего творчества там, где деятельность не носит прежде всего синтетического, конструктивного характера.

Отметим в данной связи и психологическую сторону вопроса. Самостоятельно составленная и решенная задача запоминается полнее и прочнее, чем просто решенная [35, стр. 262].

Данный вывод подтверждается и опытом учителей: например, передовые учителя математики Липецкой области считают, что ни один вид работы не заставляет учащихся так активно мыслить, как составление задач [25].

## 9. ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА СОСТАВЛЕНИЯ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ

С точки зрения кибернетики условие любой задачи (или примера) содержит в закодированном виде программу для логических операций, приводящих к ответу; в этом смысле процесс составления задач подобен процессу программирования работы некоторой вычислительной машины, причем оказывается, что количество информации, содержащейся в условии задачи, больше, чем ее количество в полученном ответе [13, стр. 18].

Еще больше разница между объемом информации, использованной в процессе составления задачи, с одной стороны, и содержащейся в условии составленной задачи, с другой стороны: только незначительная часть информации, использованной при составлении задачи, включается в условие задачи.

В школах все еще мало уделяется внимания заданиям, подобным следующим:

Найти целые числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , такие, чтобы их наибольшим общим делителем была 1. Как называются такие числа?

Наименьшее общее кратное двух чисел равно 12. Назвать такие пары чисел. Сколько всего решений?

Составить и решить систему двух уравнений второй степени, имеющую данные корни.

Составить задачу, решаемую квадратным уравнением, так, чтобы она имела два решения.

Решено логарифмическое уравнение; составить аналогичное уравнение с корнями:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = +1$ .

Составить неравенство второй степени, имеющее решение:  $3 < x < 5$ .



Составить геометрическую прогрессию, такую, чтобы сумма ее членов была равна 20, и т. п.<sup>1</sup>.

Решение готовой задачи оказывается часто тривиальным, составление аналогичной задачи, удовлетворяющей определенным условиям, по новизне применяемых при этом логических средств представляет вначале значительные трудности.

В то же время — и это очень важно — трудность выполнения задания по составлению является временной, относительной: показ учителем способа составления превращает это задание в обычное, доступное для всех учащихся<sup>2</sup>.

Чтобы подтвердить сказанное, приведем один характерный пример.

Иррациональное уравнение вида  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-3} = 1$  решается в школе путем преобразования к квадратному уравнению (с помощью возведения в квадрат обеих частей уравнения), что не представляет особых трудностей.

Когда же мы предложили составить уравнение вида  $\sqrt{a_1x+b_1} + \sqrt{a_2x+b_2} = c$ , такое, чтобы оно имело одним из корней  $x_1 = 3$ , лишь наиболее сильные из десятиклассников сумели справиться с этим заданием<sup>3</sup> (эксперимент проводился без специальной подготовки учащихся к выполнению таких упражнений).

Затем задание было осложнено требованием составить такое же уравнение, имеющее два заданных корня (скажем,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ ). Вначале задание казалось не имеющим общего решения даже учителям-математикам.

Однако достаточно было учителю один раз показать выполнение данного задания посредством метода неопределенных коэффициентов, чтобы восьмиклассники стали легко справляться с составлением подобных уравнений.

Точно так же задание составить систему двух уравнений первой степени с данным решением ( $x = 2$ ,  $y = 3$ ) кажется довольно сложным даже студентам пединститута, хотя научить этому нетрудно и семиклассников.

<sup>1</sup> Чтобы убедиться в степени новизны подобных заданий, читатель может, выполнив какое-либо из этих заданий, сравнить потраченные усилия и время с теми, которые нужны для выполнения соответствующих аналитических заданий по решению готовых задач тех же видов.

<sup>2</sup> Сравним: деление целых чисел в средние века считалось непостижимо трудным делом, хотя сейчас, когда найден алгоритм выполнения его и разработана соответствующая методика обучения этому алгоритму, оно усваивается всеми нормальными детьми 10 лет.

<sup>3</sup> О сложности этой задачи, вызванной в сущности только необычностью для школы (в том числе и для учителя) синтетических приемов рассуждений, можно судить по тому, что она была опубликована редакцией журнала «Математика в школе» в качестве конкурсной (условие задачи—1960 г., № 6; решение—1961 г., № 3).

Примеры подобного вида рекомендуется рассматривать с учащимися на внеклассных, кружковых занятиях.



Введение синтетических упражнений надо начинать с элементарных; очень важно, например, приучить учеников иллюстрировать правила и определения соответствующими примерами.

Но часто учителя забывают требовать это.

В практике обучения зачастую решение нового вида упражнений (например, задачи нового типа) начинают с анализа готового условия.

Наш опыт показывает, что нередко более целесообразно идти иным путем, когда учитель, привлекая к работе учеников, составляет новую задачу, а затем школьники решают составленную задачу коллективно. При таком методе учащиеся наблюдают сначала процесс синтеза, а затем — анализа; здесь синтез пролагает путь анализу в соответствии с логикой вопроса.

При этом ученики усваивают во взаимосвязи оба пути мышления: обучаются и составлению задач, и решению их.

Иногда высказывается мнение, будто бы внедрение синтетических упражнений равносильно добавлению новых разделов в программу и поэтому потребует дополнительного времени.

Это имело бы место тогда, когда учитель знакомил учащихся с приемами составления совершенно отдельно от приемов решения (скажем, сначала закончили бы решение всех видов линейных уравнений, а потом лишь приступили бы к составлению некоторых из них).

Но если решение каждого нового вида уравнения (неравенства, задачи и т. д.) сразу на том же уроке сопровождать составлением аналогичного (либо показать процесс составления нового вида упражнения, чтобы затем научить детей решать его), то дополнительного времени не потребуется: в этом случае оба процесса образуют логическое единство.

Подобно тому как устройство машины изучают, разбирая ее на части и собирая из отдельных частей целое, так и здесь при составлении упражнения и решении его одно действие подкрепляет другое.

Указанное возражение связано также и с тем, что не учитывается сущность этих упражнений: во-первых, составляются задачи по тем же самым разделам, по которым раньше давались исключительно готовые задачи и примеры; во-вторых, составление какого-либо упражнения завершается решением его.

Стало быть, синтетическое упражнение содержательнее аналитического, первое включает в себя второе.

Составление и решение одной задачи дидактически гораздо полезнее, чем решение двух готовых задач того же вида, причем первое осуществляется в общем за меньшее время.

Поэтому, как это и обнаружилось в нашем опыте, правильное сочетание синтетических и аналитических упражнений в итоге сокращает время изучения материала.

Например, сравнительно прочное усвоение восьмиклассниками



темы «Квадратное уравнение» имеет одной из причин то, что здесь ученики выполняют структурно взаимно обратные упражнения: решение и составление квадратных уравнений по теореме Виета (этого пока нельзя утверждать относительно других разделов алгебры).

Знаменательно, что это положение находит психологическое объяснение, а именно составление задач и их решение всегда приводит к возникновению циклических связей мыслей (на основе перерастания прямой связи  $(A \rightarrow B)$  в обратную  $(B \rightarrow A)$  и появления замкнутой связи  $(A \rightarrow B \rightarrow A)$ ). Подтвердим сказанное, для чего проанализируем несколько примеров.

Пусть решается алгебраическим способом следующая задача:  
*Отец и сын вместе заработали 60 руб., причем заработок отца больше заработка сына в два раза. Сколько заработал каждый из них?*

Решение сводится к составлению уравнения

$$2x + x = 60.$$

(У)

(О т в е т к задаче. 40 руб. и 20 руб.)

Проверка ответа в сущности сводится к установлению тождества

$$\overline{20} \cdot 2 + \overline{20} = 60.$$

(Т)

Таким образом, схема обычных упражнений по решению задач алгебраическим способом выглядит так: задача (З)  $\rightarrow$  уравнение (У)  $\rightarrow$  тождество (Т).

Можно решить сотню таких задач, но от этого мышление не обогащается обратимыми связями типа: тождество  $\rightarrow$  уравнение  $\rightarrow$  задача. (Примечателен в этом отношении следующий факт: восьмиклассники обнаруживали непонимание смысла тождества, не умели конструировать тождества, пока не выполняли упражнений по преобразованию тождества в уравнение.)

Чтобы довести одностороннюю незамкнутую связь  $(З) \rightarrow (У) \rightarrow (Т)$  до циклической связи  $(З) \rightarrow (У) \rightarrow (Т) \rightarrow (У) \rightarrow (З)$ , надо сразу же вслед за решением предыдущей задачи предложить ученикам составить аналогичную задачу, исходя, например, из тождества

$$\overline{30} \cdot 4 + \overline{30} = 150.$$

(Т<sub>1</sub>)

Ученики обнаружат одинаковую роль чисел 20 и 30 соответственно в тождествах (Т) и (Т<sub>1</sub>) и перейдут от тождества (Т<sub>1</sub>) к уравнению (У<sub>1</sub>):

$$4x + x = 150.$$

(У<sub>1</sub>)

Дальше остается к уравнению (У<sub>1</sub>) подобрать соответствующее условие задачи (З<sub>1</sub>).

Ученик А. составил, например, такую задачу:

*Учительница принесла тетради в клетку и в линейку — всего 150 штук. При этом оказалось, что тетрадей в клетку было*

больше, чем в линейку.  
Практика обучения и составления программ и «внепрограммных» задач.

Составление задач имеет применение в готовой задаче, как правило, знаний.

Однако в первоначальном конструировании из которых намечено часто приходится удачно соединять совершенно разные, но лишь второе и первого.

Разведенность творческих упражнений и технической подготовки.

Беда эта имеет свои корни, а первичные и турные недостатки.

Так, например, институт в массе своей «точно», не представляемой; в лучшем случае — прямой теоремы в

Под обобщением суждения от частного к общему («остроугольный треугольник вообще»).

Схема же умозаключения первая по а, с, х. Вторая по в, с.

А. Шепетов.



больше, чем тетрадей в линейку, в 4 раза. Сколько было тех и других тетрадей в отдельности?

Практика обучения, включающая сопоставление процессов решения и составления задач, показывает, что при такой методике ученики значительно быстрее усваивают не только предусмотренное программой умение решать задачи, но, сверх того, овладевают и «внепрограммным» умением конструировать алгебраическую задачу.

Составление задачи, имеющей наперед заданные решения, требует применения знаний в иных связях, чем это бывает при решении готовой задачи, хотя и составление задачи, и решение готовой задачи, как правило, выполняются на основе одной и той же суммы знаний.

Однако в первом случае нужно владеть еще особыми приемами конструирования задачи, комбинирования ее элементов, многие из которых намечаются с большой долей произвольности. При этом часто приходится искать необычные связи, пока не будет найдено удачное соединение элементов задачи.

Умение решать школьные задачи и умение составлять таковые — совершенно разные умения. Из первого отнюдь не вытекает второе, но лишь второе раскрывает возможности подлинного познания первого.

Разведенность во времени контрастных знаний и отсутствие творческих упражнений приводит к крупным прорехам в математической подготовке учащихся.

Беда эта имеет основной причиной не учителя, передатчика знаний, а первичные источники информации школьника, т. е. структурные недостатки учебников.

Так, например, некоторые поступавшие в столичный пединститут в массе своей «не владеют понятиями «необходимо» и «достаточно», не представляют зависимости между прямой и обратной теоремой; в лучшем случае понаслышке знают, почему применение прямой теоремы вместо обратной — грубая логическая ошибка»<sup>1</sup>.

#### 10. ОБУЧЕНИЕ ПРИЕМУ ОБОБЩЕНИЯ

Под обобщением будем понимать распространение какого-либо суждения от частного понятия к общему (например, от видового понятия «остроугольный треугольник» к родовому понятию «треугольник вообще»).

Схема же умозаключения по аналогии такова:

Первая посылка. Предмет  $A$  обладает свойствами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ .

Вторая посылка. Предмет  $B$  обладает свойствами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

<sup>1</sup> А. Ш е п е т о в. Претенденты. «Учительская газета» от 15 августа 1968 г.



**З а к л ю ч е н и е.** Вероятно, предмет *В* обладает и свойством *х*. Суждения, полученные по аналогии, будут проблематическими и подлежат дальнейшему исследованию и доказательству.

Умозаклучения по аналогии являются неременной составной частью творческого мышления, так как этим путем мысль человека выходит за пределы известного, пролагая путь к неизвестному.

Об аналогии отзывался в поэтически восторженной форме знаменитый ученый Кеплер, первооткрыватель законов небесной механики: «...Я больше всего дорожу Аналогиями, моими самыми верными учителями. Они знают все секреты Природы, и ими меньше всего следует пренебрегать» [28, стр. 31].

Умственное развитие учащихся, которые должны подготавливаться уже в период школьного обучения к роли творчески мыслящих активных деятелей, не может быть полноценным, если их не научат в школе специально применению приема аналогии.

Простое применение аналогии дает упражнение, подобное, однопорядковое с исходным. От него следует отличать составление задачи обобщением, когда новая задача оказывается в том или ином отношении сложнее исходной. Процесс обобщения основывается на применении аналогии, но не сводится полностью к ней.

Применение обобщения связано с преобразованием мыслей, с умственным экспериментированием; оно есть одно из самых важных средств самообучения, т. е. самостоятельного расширения и углубления имеющихся знаний.

Для достижения глубокого усвоения нового понятия, способа решения нельзя обходиться задачами одного уровня трудности, а нужно предложить обобщенную задачу, а еще лучше дать учащимся возможность самим обобщить решенную задачу, чтобы затем решить таковую, видоизменяя, если нужно, прежний способ.

Нельзя признать удачным существующую практику дачи заданий, когда как в *I*, так и в *X* классе (без учета определившихся склонностей учащихся старших классов) всем учащимся предлагается одно и то же задание: предлагая одно и то же задание, мы пытаемся измерить разные способности учащихся одной меркой.

Наличие сплошь высоких баллов при тестовой проверке знаний или поголовный неуспех в контрольной работе — вот явные признаки потери чувства меры учителем.

В практике обучения общее классное задание рассчитано на среднего ученика, а для расширения познавательных способностей более сильных учащихся необходимы дополнительные задания по самостоятельному обобщению и решению составленных задач.

Если, скажем, готовую задачу решают все учащиеся класса в основном одинаковой последовательностью рассуждений, то с обобщением уже справляется не всякий<sup>1</sup>; результат обобщения

<sup>1</sup> В таких случаях задание по обобщению упражнений должно быть адресовано интересующимся математикой.



зависит не столько от суммы знаний, примерно одинаковой для всех учащихся класса, а от умения комбинировать, связывать эти знания по-новому, заглядывать дальше обычных пределов.

Характер упражнений, выполняемых в классе, должен отразиться и на характере контрольных и проверочных работ: чему обучают, то и следует проверять.

Наша практика говорит, что синтетические упражнения целесообразно включать в контрольные и проверочные письменные работы учащихся, хотя и в меньшем количестве, чем аналитические.

Всякая математическая задача неисчерпаема в своих связях с другими задачами; после решения задачи почти всегда можно найти предмет размышления, найти несколько направлений, в которых удастся обобщить задачу и найти затем решения созданных таким образом новых проблем.

Работу по обучению приемам обобщения удобно начинать с упражнений тестового характера.

Вот пример подобного простейшего задания.

Даны три рисунка:  $A$ ,  $B$ ,  $a$  (рис. 8).

Требуется нарисовать (или отобрать из нескольких предложенных рисунков) такой рисунок  $b$ , чтобы  $a$  относилось к  $b$  так же, как  $A$  относится к  $B$ .

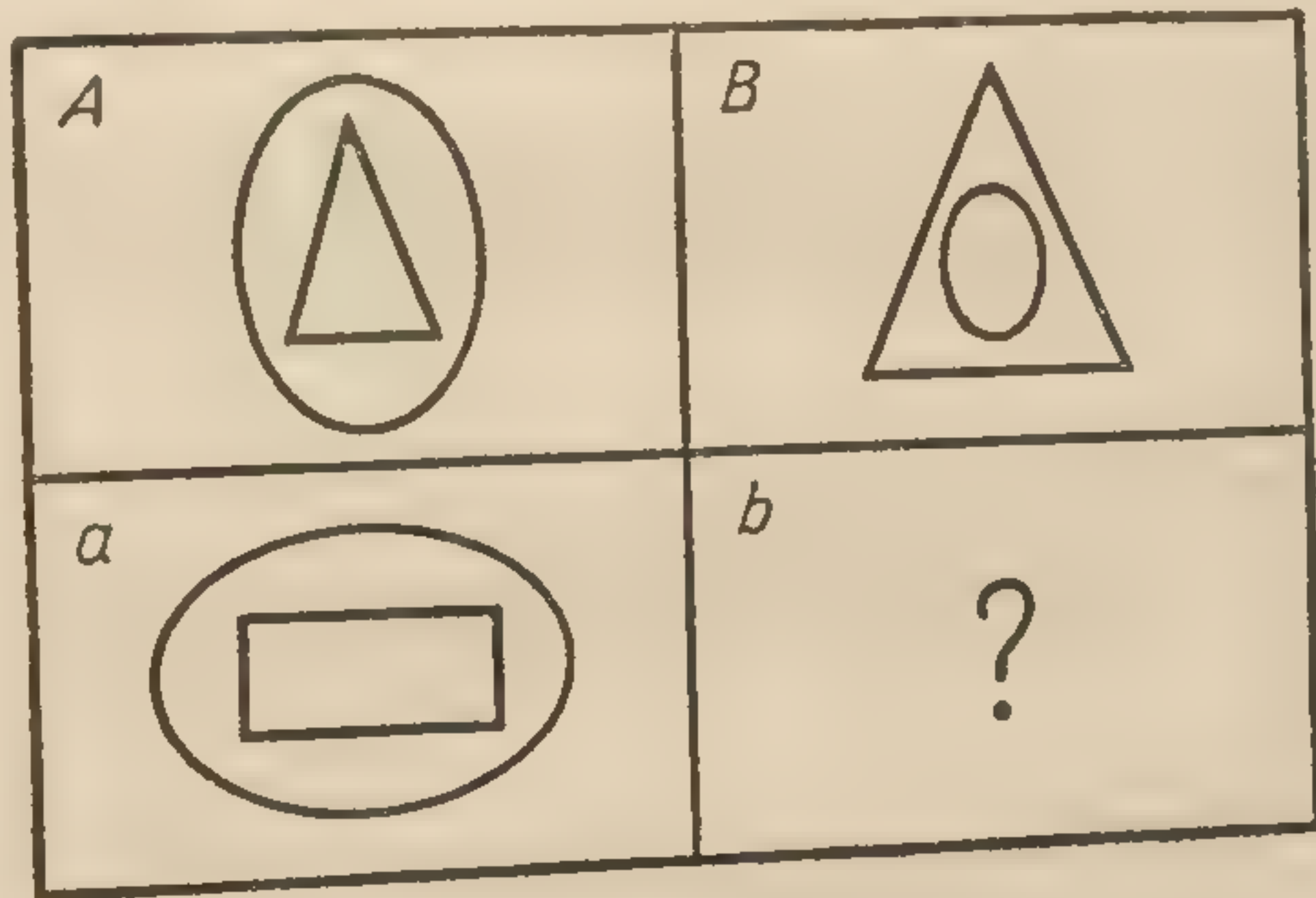


Рис. 8

Решающий данную задачу обнаруживает в двух парах фигур сходство отношений: объемлющая меняется местом с объемлемой (или происходит перекодировка: овал вне прямоугольника, овал внутри прямоугольника<sup>1</sup>).

Результаты обобщения учащихся бывают различной сложности; даже при выполнении простейших синтетических заданий проявляется резкая разница в силе воображения учащихся.

<sup>1</sup> Интересно отметить, что дети и взрослые мало чем отличаются по успешности решения таких логических упражнений. Уже созданы программы, по которым вычислительные машины решают подобные задачи на аналогию.



Например, когда было поручено шестиклассникам придумать различные разложения выражения  $6x^2$  на два множителя, то большинство учащихся ограничилось тривиальными ответами:  $2x \cdot 3x$ ;  $6x^2 \cdot 1$ ;  $6 \cdot x^2$ ; лишь некоторые учащиеся, отличающиеся от своих сверстников в большой мере воображением и комбинаторскими способностями, придумали разложения  $12x^2 \cdot \frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4} \cdot 8x^2$ ; только один «ухитрился» использовать буквенные показатели:  $\frac{1}{12} x^k \cdot 72x^{2-k}$ .

На этом простейшем примере мы видим, какой широкий круг для комбинаций открывается перед учащимися, когда они получают задания по синтезу тех или иных выражений.

Пусть решена задача на среднее арифметическое:

*Купили 3 кг сушеных яблок по 60 коп., 7 кг сушеных груш по 50 коп. Сколько стоит килограмм фруктовой смеси?*

Решение. 
$$\frac{60 \cdot 3 + 50 \cdot 7}{3 + 7}.$$

Противоположным, недостающим элементом данного упражнения было бы задание: составить и решить аналогичную задачу по обобщенной формуле:

$$\frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{A + B + C} =$$

В практике обучения очень часто упускают возможности самостоятельного обобщения учащимися математических предложений.

1. Пусть учащиеся ознакомились с приемом устного умножения на 11:

«Чтобы умножить число на 11, надо приписать к нему ноль и затем сложить его с первоначальным числом».

При умелом руководстве учителя удастся направить мысль учащихся на обобщение этого правила для случаев умножения на 101, 1001 и т. д. Обобщенные правила могут сформулировать сами учащиеся.

2. Пусть шестиклассники вывели формулу квадрата двучлена:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Они же выполняют много упражнений по умножению многочлена на многочлен.

Учитель мог бы предложить учащимся вычислить  $(a + b + c) \times (a + b + c)$  и попытаться найти общее правило возведения в квадрат любого многочлена:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ .

Такое упражнение вполне доступно и интересно для учащихся (самостоятельное обобщение формулы), но оно обычно редко предлагается учителем.

3. В школе знакомят с признаком делимости на  $9 = 10 - 1$ . Уместно обобщить этот признак, а именно установить признак де-



лимости на  $99 = 10^2 - 1$ ,  $999 = 10^3 - 1$  и вообще на числа вида  $10^k - 1$ .

Число делится на 9, 99, ...,  $10^k - 1$ , если сумма чисел, содержащихся в одно-, двух-, ...,  $k$ -цифровых гранях, делится на 9, 99, ...,  $10^k - 1$ . Например, 907 092 делится без остатка на 999, так как  $907 + 092 = 999$ .

4. Пусть учащиеся в классе доказали неравенство  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ , где  $a, b, c$  — положительные числа.  
Решение.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}. \quad (1)$$

Аналогично имеем:

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad (2)$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ac}. \quad (3)$$

Сложив в отдельности левые и правые части неравенств (1—3) и разделив обе части на 2, получим доказываемое неравенство  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ .

Учитель теперь ставит проблему: обобщить доказанное неравенство на 4, 5, ...,  $n$  членов. Итак, как же составить неравенство с четырьмя членами?

Запишем левую часть:  $a + b + c + d$ .

Это сумма четырех чисел. А как записать правую часть?

Какую закономерность можно заметить в правой части доказанного неравенства? (Подкоренное выражение есть произведение двух рядом стоящих членов левой части, взятых последовательно.) Вероятно, таково же должно быть строение обобщенного неравенства.

Отметим, что такое осмысливание структуры выражения становится возможным лишь после предъявления задания составить новое выражение, аналогичное исходному.

Итак, предположим:

$$a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$$

Доказательство строится аналогично:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc};$$

$$c + d \geq 2\sqrt{cd};$$

$$d + a \geq 2\sqrt{da}.$$

Сложив левые и правые части отдельно, получим новое неравенство, являющееся плодом творчества самих учащихся.



Более смелые из них могут пойти дальше, обобщив неравенство на  $n$  членов:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_1}.$$

В этом случае они могут применить для доказательства метод математической индукции; можно также доказать его и непосредственно.

5. На уроках геометрии учащиеся могут посредством обобщения получить новые соотношения.

Например, от соотношения  $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$ , верного для треугольника, учащийся может перейти к соотношению  $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}$ , верному для тетраэдра, где  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — соответственно высоты треугольника (тетраэдра), а  $r$  — радиус вписанной в него окружности (сферы) и т. д.

6. Пусть требуется составить квадратный трехчлен, достигающий максимума, равного 6, в точке  $x = 3$ .

Для этого достаточно написать выражение вида  $y - 6 = a(x - 3)^2$ , где  $a < 0$ , а затем, если нужно, привести к стандартному виду.

Если бы речь шла о минимуме функции с теми же условиями, то в том же самом выражении следует взять  $a > 0$ .

Однако задание можно обобщить на аналогичную функцию двух переменных:

Парабола.	Параболоид.
$y - 6 = -2(x - 3)^2$ $y_{\max} \Big _{x=3} = 6.$	$z - 6 = -2(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2,$ $z_{\max} \Big _{\substack{x=3 \\ y=-2}} = 6.$

Соответственно для минимума функции:

$y - 6 = +2(x - 3)^2,$ $y_{\min} \Big _{x=3} = 6.$	$z - 6 = +2(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2,$ $z_{\min} \Big _{\substack{x=3 \\ y=-2}} = 6.$
--	--

Нет ничего хуже, когда в таких удобных случаях учитель отнимает у учащихся самое интересное, опустив процесс обобщения (или взяв его на себя), предлагает учащимся готовое обобщенное соотношение, оставляя им опять только доказательство, решение. Применению аналогии и обобщения надо учить учащихся особо,



на специальных упражнениях, так же как и иным логическим операциям: индукции и дедукции, анализу и синтезу<sup>1</sup>.

Нельзя думать, будто ознакомление с обобщением и аналогией надо вести на одних лишь положительных примерах.

Напротив, в обучении важно показывать, что истинность и ложность суждений идут в мышлении рука об руку.

Полезно сравнивать верные соотношения с неверными, имеющими по форме внешнюю, неглубокую аналогию:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \text{ но } \frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b};$$

$$5 \cdot 3 = 3 \cdot 5, \text{ но } 5^3 \neq 3^5;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ но } \lg(ab) \neq \lg a \cdot \lg b;$$

$$abx = bax, \text{ но } a \sin bx \neq b \sin ax \text{ и т. д.}$$

Очевидно, некритическое использование аналогии может приводить к ошибкам, если только забыть, что вывод, полученный по аналогии, необходимо завершать проверкой, доказательством.

Аналогия, хотя и вводит часто в заблуждение, все же остается одним из средств, выводящим на путь истины.

Упражнения по обобщению решенных задач могут найти место при изучении самых разнообразных тем, в особенности на факультативных занятиях или на занятиях кружка.

Цепь обобщений может содержать три, четыре и больше звеньев, пока мы не достигнем конечного пункта, где утверждение сменяется отрицанием. Приведем соответствующие примеры.

7. а) Дан прямоугольник со сторонами  $4 \cdot 9$ . Разделить его на 2 части такие, чтобы из них можно было сложить квадрат ( $6 \cdot 6$ ).

Решение показано на рисунке (рис. 9)

б) Дан прямоугольник со сторонами  $4,5 \cdot 8$ . Разделить его на 2 части такие, чтобы из них можно было сложить квадрат. Решение (объяснить по рисунку 10).

От чего же зависит число ступенек лестницы в фигурах? При каком отношении сторон исходного прямоугольника задача не может быть решена?

в) Предлагаем читателю обобщить задачу на пространство. Каково наименьшее число частей, на которые нужно разрезать прямоугольный параллелепипед  $32 \cdot 75 \cdot 90$  так, чтобы из них можно было сложить куб  $60 \cdot 60 \cdot 60$ ?

<sup>1</sup> Вопросу о месте аналогии при обучении математике посвящена наша книга [47]. Весьма основательный анализ данной проблемы дан в известных книгах Д. Пойа [28 а, б].





Рис. 9

8. а) В ящике находятся яблоки двух сортов. Указать наименьшее число яблок, которое нужно вместе взять из ящика, чтобы среди них были два яблока одного сорта.

О т в е т. 3 яблока.

в) Обобщим задачу, изменяя другой параметр:

В ящике находятся яблоки  $n$  сортов. Требуется указать наименьшее число яблок, взятых одновременно, чтобы среди них наверняка оказалось  $k$  яблок одного сорта.

О т в е т.  $(k - 1) \cdot n + 1$ .

9. а) Требуется расставить в квадрате 4 белых, 4 красных, 4 синих и 4 желтых квадратика так, чтобы ни в одном горизонтальном, вертикальном или диагональном ряду не повторялись цвета (рис. 11)

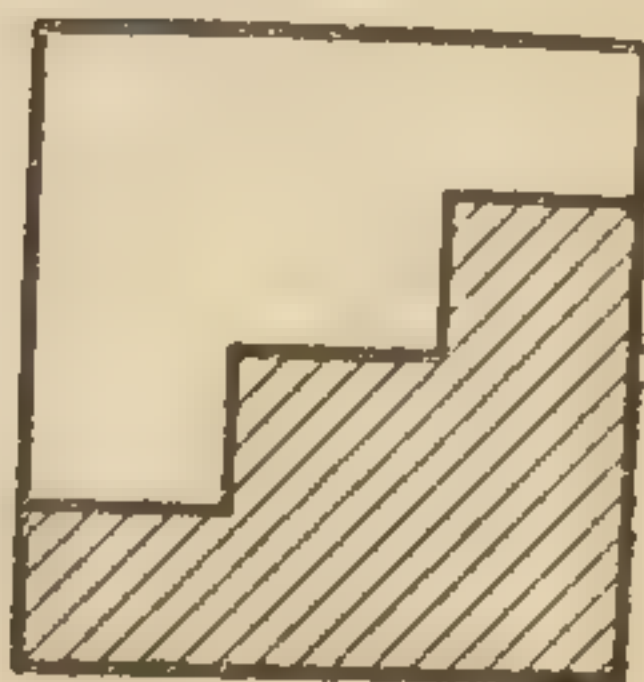
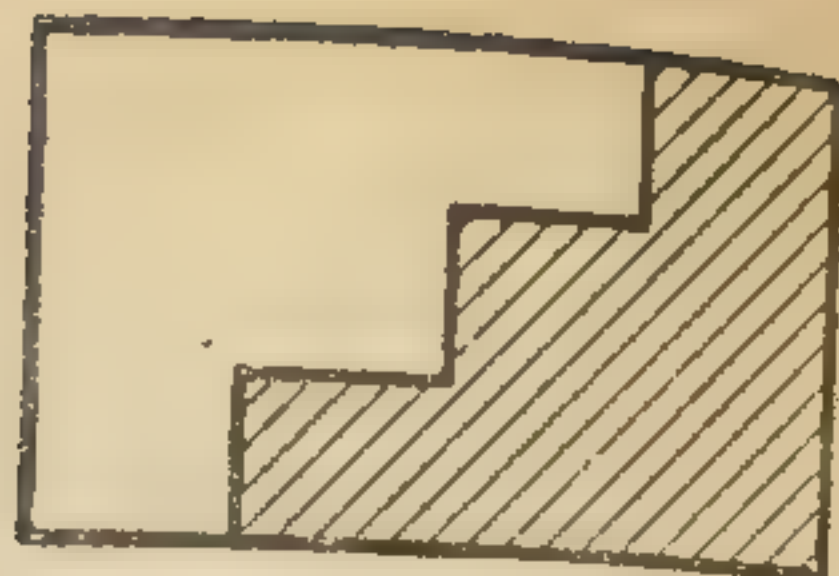


Рис. 10

б) Решить задачу при тех же требованиях (чтобы в наборе оказалось 2 яблока одного сорта), если в ящике имеются яблоки трех сортов, четырех сортов,  $n$  сортов.

О т в е т.  $n + 1$  яблок.

г) Предлагаем читателю обобщить задачу дальше:

...чтобы среди вынутых сразу яблок было наверняка по  $k$  яблок каждого из двух сортов (число яблок в ящике неограниченно). Но есть ли это предельное обобщение, когда задача уже не имеет решения?

б) Имеем по четыре фигуры: круг, квадрат, ромб, треугольник, окрашенные каждая в белый, красный, синий и желтый цвет.

Требуется разместить фигуры в квадрате так, чтобы ни в одном из рядов не повторялись однородные фигуры и цвета. Решение задачи сводится к отражению матрицы самой на себя от одной из диагоналей (рис. 12), причем большими буквами мы можем закодировать один признак (фигуры), малыми буквами — второй признак (цвет.)



С	К	Д	Ж
Ж	Д	К	С
К	С	Ж	Д
Д	Ж	С	К

Рис. 11

ОК	КД	РС	ТЖ
ТС	РЖ	КК	ОД
КЖ	ОС	ТД	РК
РД	ТК	ОЖ	КС

Рис. 12

в) Предлагаем решить задачу, обобщенную на три параметра. Пусть даны 64 фигуры, различающиеся:

а) по форме: 16 прямоугольников, 16 треугольников, 16 окружностей, 16 овалов;

б) по окраске: 16 белых, 16 красных, 16 синих, 16 желтых;

в) по материалу: 16 картонных, 16 железных, 16 деревянных, 16 стеклянных.

Каждая фигура, таким образом, обладает тремя признаками. Требуется расставить их по одной в ячейках куба  $4 \cdot 4 \cdot 4$  так, чтобы ни в одном из трех направлений не повторялся ни один из признаков. Задача имеет простое решение, сводящееся к наложению матриц рассмотренного вида.

Учащиеся, будучи предоставлены полету своей фантазии, могут выйти и «за пределы доступного».

Например, слишком широкие обобщения приводят к формулировке задач, неразрешимых известными им средствами.

Отрицательного в том ничего нет, лишь бы учащийся сумел отличить правильное от неправильного, возможное от невозможного: пусть математика предстает перед изумленным взором ученика не как набор давно решенных задач, а как живое и вечно строящееся сооружение, устремленное в безграничную высь.

Ведь нетрудно показать и пятиклассникам, как путем обобщения математик Ферма загадал человечеству свою «великую теорему».

Очевидно,  $3 + 4 = 7$ .

Ясно,  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

Доказано:  $a^3 + b^3 \neq c^3$ .

Еще не доказано:  $a^n + b^n \neq c^n$  или  $a^n + b^n = c^n$  ( $n$  — любое целое число, большее 3).

Посредством творческих форм упражнений на базе материала, изучаемого в школе, можно и должно развивать воображение учащихся, равно как и иные качества личности: волю, настойчивость, целеустремленность.

Приведем несколько характерных примеров.

1. Роль (нейтральных) элементов сложения и умножения возможно показать в сравнении буквально с I класса.



Когда сумма равна слагаемому?

$$a + 0 = a.$$

Когда произведение равно сомножителю?

$$a \cdot 1 = a.$$

Такую же роль играет нуль-вектор ( $\vec{0}$ ) при сложении векторов и единица при умножении векторов на число:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

$$\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}.$$

2. Хорошо противопоставлять коммутативность и некоммутативность операций.

Коммутативность (переместительность).

$$3 + 4 = 4 + 3;$$

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3;$$

$$3 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 3;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Некоммутативность (непереместительность).

$$\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3};$$

$$2^5 \neq 5^2;$$

$$\sqrt[3]{2^5} \neq \sqrt[5]{2^3}.$$

3. Для развития обобщающего мышления ценно также раннее использование суждений отношения, посредством которых вводится одно из центральных понятий математики — структура порядка.

При этом опять целесообразно противопоставлять примеры и контрпримеры.

Симметричность.

$$2 + 3 = 5 \rightarrow 5 = 2 + 3;$$

$$a \parallel b \rightarrow b \parallel a;$$

$$a \perp b \rightarrow b \perp a.$$

Уравнение  $x^2 - 3x + 2 = 0$  эквивалентно уравнению  $(x - 2)(x - 1) = 0$ . Уравнение  $(x - 2)(x - 1) = 0$  эквивалентно уравнению  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

Иван — родственник Петра.  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  Петр — родственник Ивана.

4. Транзитивность (переходность).

$$a = b; b = c \rightarrow a = c;$$

$$a \parallel b; b \parallel c \rightarrow a \parallel c;$$

$2 < 5; 5 < 7 \rightarrow 2 < 7$ . Орел южнее Москвы; Москва южнее Мурманска.  $\rightarrow$  Орел южнее Мурманска.

Несимметричность.

$$2 > 1,$$

$$\text{но } 1 < 2.$$

Орел южнее Москвы.  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  Москва севернее Орла.

Иван — сын Петра.  $\rightarrow$  Петр — отец Ивана.

Нетранзитивность (непереходность).

$$10 \neq 15; 15 \neq 10 \rightarrow 10 = 10;$$

$a \perp b; b \perp c \rightarrow a \parallel c$ . Прямая  $a$  не пересекается с  $b$ ;  $b$  не пересекается с  $c$ ;  $a$  пересекается с  $c$  (в пространстве).

Иван — сын Петра; Петр — сын Трофима  $\rightarrow$  Иван —



40 кратно 20; 20 кратно 5.  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  40 кратно 5.

— внук Трофима.

40 не кратно 15; 15 не кратно 8.  $\rightarrow$  40 кратно 8.

4 — взаимно простое с 15; 15 — взаимно простое с 8  $\rightarrow$  4 — взаимно составное с 8 (не взаимно простое с 8).

Время и усилия, затраченные на обобщение знаний, окупаются той большой экономией мышления в последующем, которое достигается благодаря единообразным методам усвоения материала.

## 11. О КЛАССИФИКАЦИИ УПРАЖНЕНИЙ И О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНАХ

Для решения проблемы классификации математических упражнений необходимо сначала уточнить содержание самого понятия «математическое упражнение».

Из изложенного нами выше вытекает целесообразность придавать понятию «математическое упражнение» более широкое содержание, чем понятию «задача».

Под математическим упражнением необходимо понимать задания двух видов: предложение решить задачу (или пример) и структурно обратное задание — составить задачу (или пример).

Примером будем считать любое упражнение, записанное только с помощью математических символов.

Задание «Решить уравнение  $x + 10 = 35$ » есть пример, а задание «Найти неизвестное слагаемое, если сумма равна 35, а другое слагаемое равно 10» будет задачей, так как оно сформулировано с применением слов и математических понятий.

Упражнения на составление задач и примеров надо ввести в практику обучения как равноправные среди других упражнений.

Некоторые полагают, что составление задач и примеров очень сложно и не под силу учителю, а потому ради его облегчения это дело следует целиком отдать на откуп авторам задачников.

Не будем греха таить в том, что иногда начинающие (да и не только начинающие) учителя недостаточно владеют навыками составления тех или иных упражнений, удовлетворяющих определенным дидактическим требованиям.

Но это печальное обстоятельство возникает не по их вине.

Студентов, готовящих себя к работе в роли учителя математики, сейчас не тренируют специально — что возможно и должно — в составлении задач и упражнений; молчаливо предполагается, что в соответствии с изменяющимися целями обучения они должны пользоваться задачками, издающимися под разными и многообещающими названиями, сборниками задач «для повторения», «дополнительные», «для самообразования», «повышенной трудности», «на соображение», «конкурсных задач», «для устного счета» и т. д.



Не отрицая несомненного значения этих пособий, мы желаем акцентировать внимание на том, что нельзя ориентировать учителя только на готовые сборники, что и сам учитель должен научиться составлять свои упражнения. Специфика обучения математике такова, что умение учителя вовремя сообразить, иногда экспромтом привести характерный пример, составить удачную задачу играет подчас решающую роль в срочном образовании нужной ассоциации у учащихся, в усвоении ими новой идеи, в схватывании учащимися существенных сторон излагаемого материала.

Деятельность передовых учителей математики характерна тем, что они сами составляют задачи, примеры, используемые на занятиях с учащимися, а не ограничиваются содержащимися в задачабниках; многие из учителей сочетают участие в традиционных конкурсах по решению задач с составлением своих оригинальных задач, часть которых предлагается в качестве конкурсных в методических журналах.

На основе своих занятий со студентами пединститута и учителями на летних курсах (1957—1969 гг.) мы убедились, что способы составления всех упражнений школьного курса на основе изложенных в данной книге принципов вполне доступны и целесообразны. Подходя к проблеме составления задач, даже исходя из потребностей учителя математики, мы видим, насколько назрела необходимость ознакомления учителей с приемами составления основных разновидностей упражнений по школьному курсу математики.

Однако главное в данной проблеме — повторяем — внедрение синтетических упражнений в школу, постепенное доведение простейших форм этой работы до учащихся.

Как и в случае использования приема противопоставления, внедрение синтетических упражнений связано с ломкой методических шаблонов, стандартов, поскольку в существующей учебной литературе этот вид упражнений практически отсутствует.

Хотя методика, построенная в основном на аналитических упражнениях, «проста» для учителя, но от этого в накладе оказывается ученик, ибо в силу присущей этой методике ограниченности применяемых логических средств он усваивает материал односторонне, поверхностно.

В связи с проблемой классификации математических упражнений важно обсудить вопрос о соответствующих терминах.

В исследованиях по психологии обучения установлена целесообразность сообщения ученикам терминов-названий типов задач на исходном этапе обучения этим задачам [12, 20, ].

Полезность терминов, обозначающих те или иные разновидности задач, для учителей очевидна, термины являются теми ориентирами, по которым они распределяют упражнения для занятий.

Однако нельзя согласиться с мнением, будто названия задач и соответствующая терминология должны обслуживать только учителя и вовсе не нужны ученикам.



Некоторые учителя неверно отождествляют слова-термины и формальнологические определения соответствующих им понятий.

Иногда считают, что будто слово-термин и определение обозначаемого им понятия должны вводиться одновременно после накопления у учеников достаточно большого опыта в оперировании данным понятием, не называя его соответствующим словом-термином.

В VI классе доказывают прямую и обратную теоремы о биссектрисе угла. Созданы все условия, чтобы пользоваться термином «геометрическое место точек» (или множества точек), не определяя самого понятия, не спрашивая учеников: «Что называется геометрическим местом точек?»

Однако же в действовавших программах ознакомление с этим термином не предусматривалось вплоть до VIII класса.

Или еще пример: семиклассники чертят график линейной функции — прямую линию; в учебнике написано: «график линейной зависимости».

Разгружаем ли мы ученика, подменив конкретный, точный математический термин «функция» другим, более общим и неопределенным словом «зависимость»? Конечно, нет.

Своевременно введенные термины, характеризующие узловые понятия структуры науки, являются главной опорой последующего логического познания содержания науки.

Неоправданная «осторожность» в этом вопросе, излишняя инфантильность, замена понятий псевдопонятиями (отсюда сомнительное «понятие о понятии», кочующее из программы в программу) — все это в сущности приводит к недооценке роли обобщений, к искусственной задержке умственного развития детей.

В учебнике геометрии Н. Н. Никитина (1968, § 27, 32) вместо доказательства обратной теоремы о биссектрисе угла доказывается противоположная теорема, но автор не решился назвать эту теорему ее собственным именем.

Совершенно неоправданным является и то, что в этом учебнике прямая и противоположная теоремы не отделены логически друг от друга, причем противоположная теорема вообще не сформулирована, а ее доказательство помещено в тексте в виде продолжения доказательства прямой теоремы.

Слово-термин может вводиться раньше формальнологического определения соответствующего понятия.

Уместно здесь напомнить, что многие понятия, как число, площадь, задача на сумму и отношение, методы решения геометрических задач (метод геометрических мест точек, метод подобия, алгебраический метод) и т. п., вообще не определяются в школе, хотя успешно применяются соответствующие термины при обучении.

Смысл этих понятий постигается учениками в результате многократного применения их.

В начальной школе, как показала практика последних лет, названия компонентов действий целесообразно вводить с самых



первых уроков математики; оказалось также доступным и полезным для успешного изучения систематического курса геометрии уже в начальной школе пользоваться названиями геометрических фигур (отрезок, диаметр, параллельные прямые и т. п.), разумеется, без заучивания соответствующих определений; в экспериментальных условиях учащиеся III класса успешно справлялись с задачами на пропорции и проценты [58, 59].

## 12. О РАСШИРЕНИИ И УГЛУБЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

В методике обучения математике важно разграничить дидактические понятия «расширение» и «углубление» знаний.

Зачастую расширение знаний выдают за углубление их; это приводит к неверной ориентации методической мысли при определении места и роли конкретных вопросов программы, приемов обучения, создании оптимальной структуры программы и учебников.

Так, в действовавшей до сих пор программе по арифметике для начальной школы в качестве меры по углублению знаний рекомендовалось решать примеры на умножение и деление не только на трехзначное, но и на четырехзначное число; или еще: не ограничиваясь задачами на нахождение двух чисел по сумме и кратному отношению, находить три числа по их сумме и отношению [30].

Однако переход от умножения на трехзначное число к умножению на четырехзначное число связан в первую очередь с расширением знаний, нежели с углублением их; точно так же увеличение числа данных в задаче при сохранении типа задачи, будучи связано с неизменностью основных способов рассуждения при решении ее, представляет прежде всего количественное, чем качественное, усложнение задания.

Традиционный подход к отбору материала для изучения в школе не учитывал в достаточной мере важности именно углубленного изучения материала; фактически проявлявшееся стремление охватить школьным курсом возможно большее число разделов математики приводило — как одна из причин в ряду прочих — к скользянию по поверхности теории.

Углубление же знаний связано с изменением характера умозаключений, используемых при выполнении упражнений, с заменой действий и операций им сопряженными, с перестройкой структуры упражнений (т. е. с изменением качественных и содержательных сторон математического упражнения) при сохранении, например, данных задачи, числа действий (т. е. количественных и формальных сторон математического упражнения).

Академик А. Н. Колмогоров писал по этому поводу, что учителя и экзаменаторы, будучи ограничены в своей изобретательности, подхватывают чью-нибудь удачную выдумку и начинают услож-

нять ее лишь формально.  
Скажем, построим функцию  $y = 1, x - 1$ .  
Видя  $y = 1, x - 1$ , мы не  
верняка превысим  
в скоростном режиме.  
Так, даже в  
применительно к  
арифметике с 7-  
лами, со множест  
действий, которы  
вузовского курса  
Сколько доро  
которых случайн  
получасовых выч  
Пора, вероятно  
той сложностью,  
для данного кла  
Да и работу на  
связав их с теми  
Вот одно из  
составить и реш

(Задача на  
Почитательны  
В следующем  
ствий так, чтобы  
скими цифрами

Формализм  
что от учащихся  
числа.  
Раздел отве  
выражениями:

Предложите  
ичею решение: х  
Убедитесь, что



нять ее лишь формально, создавая длинные, искусственные, но по существу тривиальные упражнения [17].

Скажем, после построения графика функции  $y = |x|$  можно немного обобщить упражнение, предложить построить график функции  $y = |x^2 - 1|$ . Но предлагать строить график функции вида  $y = ||x - 3| + |3x - 10| - |2x - 6||$  — это уже наверняка превышение меры<sup>1</sup>. Неуместна тренировка всех учащихся в скоростном решении каверзных задач.

Так, даже в учебниках математики, изданных в 1967—1968 гг. применительно к новым программам, нашли место примеры по арифметике с 7—8 (и больше!) действиями над многозначными числами, со множеством скобок, со специально запутанным порядком действий, который не встретишь среди физических формул даже... вузовского курса.

Сколько дорогих часов наших детей унесли эти архаизмы, в которых случайная описка одной цифры сводит на нет результат получасовых вычислений!

Пора, вероятно, ограничить число и порядок действий в примерах той сложностью, которая встречается в формуле решения задач для данного класса.

Да и работу над примерами возможно сделать более осмысленной, связав их с теми или иными задачами.

Вот одно из таких упражнений: записать пропущенные числа, составить и решить задачу по следующей формуле:

$$\frac{\square \cdot 73 + \square \cdot 27}{73 + 27} = \square.$$

(Задача на среднее арифметическое.)

Поучительны и такие задания:

В следующем выражении расставить числа, скобки и знаки действий так, чтобы соблюдался порядок действий, показанный римскими цифрами сверху:

$$\square^{(II)} \square^{(I)} \square^{(III)} \square$$

Формализм и поверхностность знаний прививается еще и тем, что от учащихся не требуют доведения ответа до приближенного числа.

Раздел ответов даже новейших учебников пестрит следующими выражениями:

$$\sqrt{0,8}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \frac{\lg \lg 7 - \lg \lg 5}{\lg 7 - \lg 5},$$

<sup>1</sup> Предложите ученику составить неравенство вида  $|ax + b| > k$  чтобы оно имело решение:  $x < -4$  и  $x > 6$ .

Убедитесь, что расширение и углубление знаний — это не одно и то же!



$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ и т. д.}$$

(Эти ответы нами взяты из учебника математики Кочетковых.)  
А ведь вычисление приближенных значений этих выражений сама по себе интересная работа.

Не преодолев векового гипноза радикалов и аркусов, невозможно культивировать у учащихся столь нужную «политехническую» привычку к таблицам и счетной линейке. (Кстати, можно бы перейти и к трехзначным таблицам, что заметно сократило бы расход времени на вычисления при сохранении всех познавательных моментов этого вида учебной деятельности.)

В методических пособиях достаточно внимания уделяется так называемому этапу исследования решения, являющемуся также средством углубления знаний (например, при решении алгебраических и тригонометрических уравнений, а также геометрических задач).

Однако исследование решения задачи, как бы подробно оно ни было проведено, остается все же не единственным (и, быть может, не главным) способом углубления знаний.

Оно ограничено в своих возможностях в том смысле, что исходный объект исследования дан кем-то; в процессе исследования решения задачи мышление не выходит за пределы данного объекта, движется по пути, предначертанному автором задачи.

Поэтому бывает полезно предложить такое упражнение, чтобы учащийся в ходе его анализа поневоле вынужден был действовать на основе полного развернутого правила.

Пусть учащийся дал следующее неверное решение примера на умножение:

$$\begin{array}{r} \times 426 \\ 201 \\ \hline 426 \\ 952 \\ \hline 9946 \end{array}$$

вместо правильного:

$$\begin{array}{r} \times 426 \\ 201 \\ \hline 426 \\ 952 \\ \hline 95626 \end{array}$$

Почему так устойчивы эти «ошибки с нулями?»

Психологическая сущность данной ошибки понятна: ассоциации, выработанные раньше при вычислениях с числами, не содержащими

нуля в середине.  
условиях.  
Чтобы вырабо-  
цифры промежу-  
тем, т. е. решаю-  
кратным затвер-  
Однако такая  
нию цели; указа-  
появиться через  
Применим, од-  
щимся восстано-  
примере:

Вначале зада-  
потом появляе-  
жителя — 2 (374  
ный, а даны всег-  
374). В чем же д-  
Последняя цифра  
что умножать на  
Но в задаче  
деформированный  
изучаемого.

Хорошим ср-  
которых задач д-

Между тем  
какие новые зад-

другим способо-  
того же объект-

Авторы учес-  
новидностях са-

например, счита-  
са с двумя спос-

раическим сло-  
важным ознако-

уравнений с тр-  
же время о тре-

неизвестных) и  
При обычн-

чен вопрос: че-  
лению) дать



нуля в середине, продолжают проявляться и при изменившихся условиях.

Чтобы выработать связь «нуль в середине → сдвиг влево первой цифры промежуточного произведения», учителя идут прямым путем, т. е. решают большое число примеров вида  $426 \cdot 201$  с многократным затверживанием правила.

Однако такая прямолинейная тактика мало помогает достижению цели; указанная ошибка настолько живуча, что может снова появиться через год!

Применим, однако, обходной маневр, а именно предложим учащимся восстановить отсутствующие цифры множителя в следующем примере:

$$\begin{array}{r} \times 374 \\ \dots \\ \hline 748 \\ 374 \\ \hline 38148 \end{array}$$

Вначале задание кажется учащимся совершенно непонятным; потом появляется первый проблеск — найдена цифра единиц множителя — 2 ( $374 \cdot 2 = 748$ ); но, однако же, множитель трехзначный, а даны всего два, а не три промежуточных произведения (748 и 374). В чем же дело? Дело в нуле! Где же он? В середине! Почему? Последняя цифра 4 написана не под десятками, а под сотнями. Ясно, что умножать надо на сотни, а именно на 1 сотню.

Но в задачниках по арифметике не принято предлагать такие деформированные задания, ведущие к углубленному познанию изучаемого.

Хорошим средством углубления знаний служит решение некоторых задач двумя или больше способами.

Между тем много учителя обычно занимает больше мысль, какие новые задачи еще нужно решить, но не мысль, каким еще другим способом можно решить уже решенную задачу, добыть из того же объекта новую информацию.

Авторы учебников математики прежде всего заботятся о разнообразии самих задач и примеров, а не о способах их решения; например, считается достаточным ознакомление учащихся VII класса с двумя способами решения систем линейных уравнений (алгебраическим сложением и подстановкой), но зато полагают более важным ознакомление учащихся с решением систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными теми же двумя способами. В то же время о третьем способе решения систем (сравнением значений неизвестных) в учебнике нет и речи.

При обычной нехватке времени для учителя далеко не риторичен вопрос: чему из подобных двух путей (расширению или углублению) дать предпочтение?



Так нередко новая разновидность упражнения, добытая количественным усложнением исходного, оказывается в явном предпочтении перед новым способом решения их.

Пусть решается задача:

Матери и дочери было вместе 36 лет. Мать старше дочери на 24 года. Найти возраст каждой из них.

Работа над этой задачей в том и заключается, чтобы не только решить ее двумя способами, но и сравнить эти сопряженные ходы рассуждений:

1-й способ.

- 1)  $36 - 24 = 12$ ;
- 2)  $12 : 2 = 6$  (лет дочери);
- 3)  $24 + 6 = 30$  (лет матери).

2-й способ.

- 1)  $36 + 24 = 60$ ;
- 2)  $60 : 2 = 30$  (лет матери);
- 3)  $36 - 30 = 6$  (лет дочери).

Если же данная задача решалась бы алгебраически, опять же полезно привести ученика к цели двумя путями:

1-й способ.

- $x$  лет матери;  
 $(x - 24)$  лет дочери;  
 $x + (x - 24) = 36$ ;  
 $2x - 24 = 36$ ;  
 $x = 30$  (лет матери);  
 $x - 24 = 30 - 24 = 6$   
(лет дочери).

2-й способ.

- $y$  лет дочери;  
 $(y + 24)$  лет матери;  
 $y + (y + 24) = 36$ ;  
 $2y + 24 = 36$ ;  
 $y = 6$  (лет дочери);  
 $y + 24 = 6 + 24 = 30$   
(лет матери).

Нетрудно видеть всю сомнительность рекомендации некоторых методистов, предлагающих в подобных случаях ограничиваться лишь одним «простейшим» способом, обозначая буквой  $x$  меньшее из двух чисел.

При изучении графиков функций ( $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$  и др.) в средней школе обходятся показом построения графика только «по точкам», второй способ построения графика — геометрический (без вычисления координат точек) — не рассматривается.

Подобные факты, которые можно перечислять и дальше, показывают, что существующая практика обучения слабо вооружает учащихся различными способами «преобразования информации».

Правильная методика должна учитывать и то и другое: как накопление знаний (накопление информации), так и обогащение мышления связями между знаниями (способами преобразования информации); важно не упустить второго в погоне за первым.

Другой важный вид работы, также содействующий углублению знаний, — это проверка решения найденного ответа.

Пусть решен пример на вычисление алгебраических дробей:

$$\frac{7a-6}{a^2-9} - \frac{2}{a+3} = \text{и получен ответ } \frac{5a}{a^2-9}.$$

Для шестилетнего  
ция, когда ему г

Получится ли  
Надо отметить  
над упражнениями  
ников арифмети  
В новых шко  
вильно о вреде у  
о необходимости  
ми в курсе ариф  
зательных теоре  
Такая работа  
для углубленной

13. 08

Одним из ва  
них десятилетий  
в строй мыслей

Под информа  
передаваемый от

Новизна этог  
количественной

Применение  
связано с намер

что, конечно, о

Тем не менее

воляет выявить

ления и получ

В теории ин

ции — бит. Гор

ответов принос

Рассмотрим

Требуется с

среди 8 монет,

Кратчайшее

1) На чашки  
рые перетянул

1 Отметим, чт  
проверке решени  
в настоящее вре



Для шестиклассника возникает поистине интригующая ситуация, когда ему предлагают проверить вычитание сложением:

$$\frac{5a}{a^2 - 9} + \frac{2}{a + 3}.$$

Получится ли в самом деле уменьшаемое  $\frac{7a - 6}{a^2 - 9}$ ?

Надо отметить, что проверка ответа как составное звено работы над упражнением недостаточно учитывается при составлении учебников арифметики и алгебры<sup>1</sup>.

В новых школьных программах указывается совершенно правильно о вреде увлечения сложными преобразованиями по алгебре, о необходимости ограничения действий над многозначными числами в курсе арифметики, даже о возможности сократить число обязательных теорем по геометрии.

Такая работа, безусловно, открывает большие возможности для углубленной работы над математикой.

### 13. ОБ ОБУЧЕНИИ КАК ПРОЦЕССЕ ПЕРЕРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Одним из важнейших результатов научного прогресса последних десятилетий считают проникновение понятия «информация» в строй мыслей исследователей.

Под информацией понимают любое сведение, сообщение, сигнал, передаваемый от одного предмета (живого или неживого) другому.

Новизна этого подхода заключается в возможности подойти с количественной меркой к информационным процессам.

Применение аппарата теории информации к процессу обучения связано с намеренным упрощением и огрублением этого процесса, что, конечно, ограничивает область приложения данного аппарата.

Тем не менее такой подход, ранее неизвестный психологии, позволяет выявить некоторые новые моменты в характеристике мышления и получить следствия, полезные для практики обучения.

В теории информации вводится мера для измерения информации — бит. Говорят, что выбор одного из двух равновероятных ответов приносит 1 бит информации:  $I = \log_2 2 = 1$ .

Рассмотрим следующую задачу:

Требуется обнаружить взвешиванием одну фальшивую монету среди 8 монет, если она тяжелее остальных.

Кратчайшее решение сводится к трем взвешиваниям ( $I = \log_2 8 = 3$ ):

1) На чаши весов ставим по 4 монеты. Берем те 4 монеты, которые перетянули.

<sup>1</sup> Отметим, что в русской учебной литературе имеются задачки, в которых проверке решения уделяли значительно больше внимания, чем в существующих в настоящее время.



2) Раскладываем последние опять на чашках по две. Берем пару перетянувших монет.

3) Повторив то же самое, найдем, наконец, фальшивую монету (тяжелую).

Итак, задача решена тремя выборами, т. е. решение ее имеет «цену» в 3 бита информации.

Легко видеть, что такой принцип подсчета информации (сравнения сложности задачи) обобщается: если требуется выбрать 1 элемент из  $n$  равновозможных, то количество информации вычисляется по формуле  $I = \log_2 n$ .

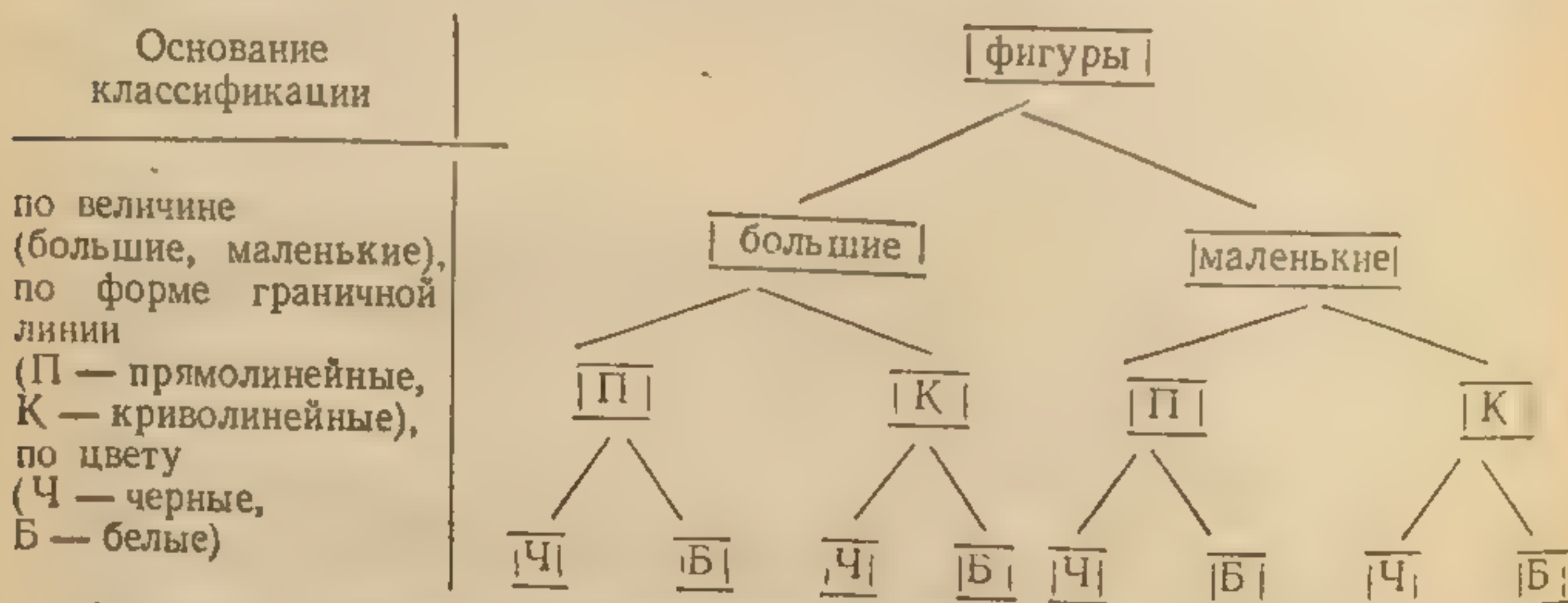
Рассмотрим еще один пример.

Пусть первоклассник рассматривает приведенные ниже рисунки (рис. 13).



Рис. 13

Пусть в речевой практике он усвоил следующую классификацию фигур:



Между учителем и учеником происходит следующая беседа:

В о п р о с. Какая фигура стоит на пятом месте? (рис. 13).

О т в е т. Маленький черный круг.

В о п р о с. Как ответить на предыдущий вопрос без слова «круг», а словом «фигура»?

О т в е т. Маленькая черная криволинейная фигура.

Или еще так:

В о п р о с. На каком месте стоит большая белая прямолинейная фигура?

О т в е т. На седьмом месте.

Отвечая на оба вопроса, ученик перерабатывает 3 бита информации, так как трижды делает выбор из двух возможностей (большая — маленькая, прямолинейная — криволинейная, черная — белая).



В принципе такие задания можно усложнять дальше, например, по отношению размеров правильная — неправильная (квадрат — прямоугольник, круг — овал), включая и не включая внутрь фигуры какую-то деталь (скажем, звездочку) и т. д.

Процесс узнавания в этом случае усложняется, поскольку приходится перерабатывать все больше информации.

Попытаемся использовать прием подсчета информации для анализа следующего, далеко не простого методического вопроса.

По традиции раздел «Первый десяток» в 1 классе изучался так: в первой подтеме знакомятся с числовым рядом от 1 до 10; во второй подтеме изучают сложение и вычитание в тех же пределах.

То, что дети знакомятся сразу с названиями всех чисел первого десятка, впоследствии проявляется отрицательно: в этом случае ученик при решении как примера  $1 + 3$ , так и примера  $1 + 9$  ответ выбирает наверняка среди всех 10 известных ему чисел. Но ведь в подобных случаях расход времени пропорционален количеству извлекаемой информации; поэтому разница в сложности примеров  $1 + 3$  и  $1 + 9$  здесь как бы смазывается: в каждом случае приходится извлекать  $\log_2 10 \approx 3,1$  бита информации<sup>1</sup>.

Второй путь, который проверен многократно автором этих строк, состоит в том, чтобы названия всех чисел до 10 не сообщать сразу учащимся; так, ученик, ознакомившись с числом 4, тут же изучает все возможные действия в пределах этого числа:  $2 + 2$ ,  $3 + 1$ ,  $1 + 3$  и т. д. [55, 56].

Нетрудно подсчитать, что если изучается число  $n$ , то всего существует  $(n - 1)$  таких примеров на сложение.

При втором подходе картина переработки информации иная: для решения примера  $1 + 3$  требуется извлечь только  $\log_2 4 = 2$  (бита): ученик пока «работает» только с четырьмя известными ему числами: 1, 2, 3, 4.

Нетрудно заметить, что второй путь должен быть значительно более экономным.

Практика обучения показала, что это действительно так: если по действовавшим «нормам» учащиеся изучали эту тему за 75 часов, в опытных классах данный материал был изучен за 50 часов<sup>2</sup>.

Всякое обучение есть многократный процесс перекодировки информации сначала с помощью учителя, а потом и самостоятельно учеником.

В этом плане можно считать, что различные методические системы отличаются друг от друга прежде всего как различные кодовые системы.

<sup>1</sup> Суть дела не изменяется от того, знал или нет малыш до прихода в школу названия чисел первого десятка; здесь определяющее значение приобретает метод введения чисел учителем, включение им числа в вычислительные операции, ибо только через последние познается число.

<sup>2</sup> Разумеется, здесь также отразилось положительное влияние и иных факторов [55—58].



Буквослагательная метода обучения грамоте, описанная в «Детстве» М. Горького, была несовершенна по причине, аналогичной рассмотренной: ведь Алеша Пешков должен был заучить сначала названия всех букв алфавита, прежде чем переходить к словам и словам.

Современный букварь построен совершенно по-другому: узнав только первые две буквы (м, а), первоклассник учится составлять слова, наполненные смыслом: *ма-ма, ам-ам*.

Стало быть, одна из особенностей рациональной дидактики заключается в возможно раннем употреблении крупных единиц — сложных носителей информации. Достоин внимания в этой связи следующий вывод теории информации: «Чтобы закодировать сообщение для безошибочной передачи по каналу с шумом, необходимо объединить длинные последовательности символов в один сверхсимвол» [27, стр. 194].

Обучение парами действий, группами задач и теорем, обратимыми связями, обобщением, соединением анализа и синтеза — все то, что мы подробно рассматривали в предыдущем изложении, — приобретает теперь тот смысл, что таким путем мы своевременно адаптируем учащихся к более сложным и потому экономным кодам.

В теории информации теоретически найдены пути такой оптимальной передачи информации<sup>1</sup>.

#### 14. УКРУПНЕНИЕ ЕДИНИЦ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Важнейшей заслугой кибернетики как нового научного направления надо признать установление ею громадной роли обратных связей для устойчивости процессов управления, к которым относится, в частности, и процесс обучения.

Понятие «обратная связь» превращается в настоящее время из узкоспециального кибернетического в общенаучное понятие, в новую философскую категорию.

Соответственно содержание данного понятия существенно изменяется, как только оно обслуживает сферу той или иной конкретной науки.

Например, обратная связь в физиологических процессах, обратная связь в психологических явлениях или обратная связь в технических системах имеют лишь тот формально общий момент, что в них движение информации носит характер, в чем-то противоположный направлению предшествовавшего процесса.

Способы же передачи и переработки информации в приведенных примерах, ее кодировки и перекодировки — да и характер и сложность самих обратных связей — оказываются сугубо различными [27].

<sup>1</sup> Подробное рассмотрение вопроса можно найти в работах [15, 27, 43].

Обратная св  
раньше других  
Согласно  
И. П. Павлова,  
действия (в том  
непрерывной си  
как бы заранее  
вательностей ог  
Простейшая  
такова:

ВХОД

Под ячейкам  
ные или живые  
Информация  
(или перекодиро  
ки В информац  
ячейку А, где  
ния промежуто  
лями.

Под эту абс  
ных связей мож  
проверкой отве  
пример, провер  
делением и наос  
рот и т. д.).

Рациональн  
ние обратных с  
работки инфор

Там, где с  
достигается воз  
ловия создают  
там общее коли  
шается), но и  
поскольку при  
«связанную» и

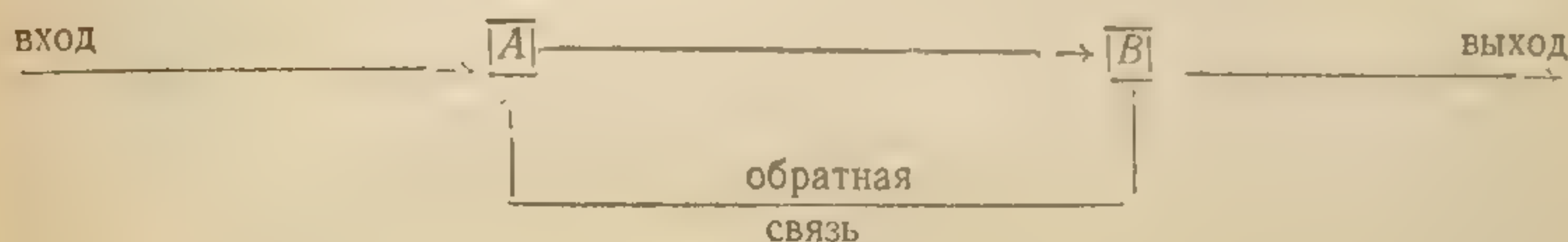
временной па  
Приведенна  
обнаружить в  
ществующие о



Обратная связь в физиологических процессах исследовалась раньше других школой И. П. Павлова.

Согласно результатам академика П. К. Анохина, ученика И. П. Павлова, осуществление организмом какого бы то ни было действия (в том числе и психического) возможно лишь на основе непрерывной сигнализации в головной мозг о процессе выполнения как бы заранее запрограммированных в головном мозге последовательностей операций [5].

Простейшая схема процесса с отрицательной обратной связью такова:



Под ячейками  $A$  и  $B$  здесь подразумеваются любые искусственные или живые органы переработки информации.

Информация, попавшая в ячейку  $A$ , подвергается переработке (или перекодированию) и затем передается в ячейку  $B$ . После ячейки  $B$  информация не идет сразу на выход, а снова возвращается в ячейку  $A$ , где имеется некоторый аппарат сравнения, сопоставления промежуточных результатов с соответствующими показателями.

Под эту абстрактную схему проявления отрицательных обратных связей можно подвести, в частности, и операции, связанные с проверкой ответа прямой задачи решением обратной задачи (например, проверку сложения вычитанием и наоборот; умножения делением и наоборот; логарифмирования потенцированием и наоборот и т. д.).

Рациональная методическая система должна облегчать проявление обратных связей в процессах мышления, т. е. в процессах переработки информации.

Там, где облегчается возникновение обратных связей и где достигается возможно большее разнообразие этих связей (такие условия создаются именно при переходе к рассматриваемой системе), общее количество информации в системе не теряется (не уменьшается), но имеет возможность накапливаться (увеличиваться), поскольку при этом «проходящая» информация превращается в «связанную» информацию, становящуюся приобретением долговременной памяти [27].

Приведенная выше схема процесса с обратной связью позволяет обнаружить в терминах переработки информации некоторые существенные особенности выполнения так называемых деформи-



рованных упражнений вида  $\square \cdot a^3 = a^8$ , которые решаются первоначально, вероятно, серией проб, подбором пропущенного элемента. (Первый цикл:  $4 + 3 = 7$ ,  $7 \neq 8$ . Второй цикл:  $5 + 3 = 8$ ,  $8 = 8$ .)

Особенности решения такого деформированного примера при-сущи вообще работе над любым упражнением, полученным из обычного исключением одного из элементов упражнения (и превращением этого элемента в искомый) и включением ответа исходного упражнения в условие нового, преобразованного задания.

Хронометрические измерения, проведенные нами, говорят о том, что на решение деформированного упражнения в среднем тратится времени в 1,5 раза больше, чем при решении обычного упражнения. Можно полагать, что во втором случае перерабатывается и пропорционально больше информации.

Поучителен также и логический анализ процесса выполнения деформированного примера.

Так, пример  $\square \cdot a^3 = a^8$  сочетает в себе воедино все действия второй ступени: его можно назвать примером на умножение (поскольку в левой части стоит знак умножения), примером на деление (поскольку находится неизвестный сомножитель по известному произведению  $a^8$  и другому известному сомножителю  $a^3$ ) и примером на разложение на множители. Значит, данное упражнение в сущности сочетает в себе все возможные действия второй ступени над одночленом (умножение, деление, разложение на множители). Поэтому решение как бы равносильно тренировке во всех этих трех операциях одновременно.

В рассматриваемой системе обучения работа над деформированными упражнениями становится одним из главнейших методических стержней.

Итак, где выполняется деформированное упражнение, там срабатывает механизм обратной связи, а там, где непрерывная коррекция и исправление ошибок, там и достигается глубина и прочность знаний.

Дидактический тезис об укрупнении единицы усвоения знаний имеет тот подтекст, что этот процесс возможен лишь на основе проявления обратных связей (в кибернетическом смысле) или обратимых связей (в психологическом плане).

Обратные связи, возникающие при поэтажной переработке информации, могут быть различной структуры.

Применительно к вопросу о математических упражнениях можно сделать следующий практический вывод. Функционирование обратных связей неизбежно при сочетании упражнений со структурно-обратными им (метод обратных задач). Поэтому в комплексе заданий по тому или иному разделу целесообразно иметь деформированные упражнения на всех уровнях, разных степенях обобщения.



Приведем пример обращенного упражнения на разных кодовых системах:

словесный код

Разность квадратов чисел равна сумме двух чисел,

символический код:

↑

умноженной на разность этих чисел.

$$|x^2 - ? = (? + 3y)(? - ?)|$$

числовой код: ↑

$$|100^2 - ?^2 = 9996|$$

Обсуждаемая в книге методическая система основана на том, что ученик многократно совершает выбор между двумя или больше возможностями: положительное или отрицательное число; прямая или обратная (противоположная) теорема; прямая или обратная функция (например, показательная или логарифмическая); придаточное предложение условия или причины; тепловой эквивалент работы или механический эквивалент теплоты и т. п.

Стало быть, при этой системе извлекается учеником дополнительная информация, поскольку соответствующая система упражнений понуждает ученика произвольно выполнять в большом числе выборы действий, знаков, понятий, суждений, ходов мыслей из нескольких возможных. Но природа информации такова, что извлекается там, где есть выбор, и извлекается тем больше, чем чаще делается этот выбор.

Так, начальные буквы или начальные слова фразы определяют соответственно последние буквы слова или окончание фразы и облегчают их угадывание.

Поэтому-то человек при быстром чтении лишь схватывает начала слов и даже фраз; остальное же домысливается на подсознательном уровне за счет опыта, многолетней учебы, за счет ранее накопленной информации.

Психологами установлено, например, что объем непосредственной памяти (одновременного запоминания) составляет 7 букв алфавита или 5 односложных слов; выходит, что второй путь выгоднее: за то же самое время память может выдать гораздо больше букв. Формула умножения одночлена на многочлен  $a(x - 2y) = ax - 2ay$  несет в себе значительную часть информации, необходимой для изучения противоположной операции разложения многочлена на множители вынесением за скобки:  $ax - 2ay = a(x - 2y)$ ; только что сформулированное свойство параллелограмма («Если четырехугольник является параллелограммом, то в нем противоположные стороны равны») содержит значительную часть информации, необходимой для составления обратной теоремы, т. е. соответствующего признака параллелограмма («Если в четырехугольнике про-



т. е. противоположные стороны равны, то он является параллелограммом) и т. д.

Поэтажная переработка информации имеет тот смысл, что при подъеме с нижнего этажа вверх память оперирует сокращениями первичных носителей информации, каждая из которых представляет целую цитату из предшествовавшего текста.

Поясним эту мысль на анализе приведенного выше примера. Закодируем слова прямой теоремы порядковыми номерами слов в предложении:

Основание (условие)	1 Если	2 четырехугольник	3 является	4 слова (A) 42 буквы
Следствие (заключение)	5 то	6 в нем	7 противоположные	8 стороны равны
	9	10		6 слов (B) 33 буквы

Запоминание обратной теоремы согласно этим представлениям совершается иначе, чем прямой теоремы.

А именно во втором случае не повторяются те же  $42 + 33 = 75$  букв, для этого достаточно запомнить лишь изменившуюся последовательность известных символов высшего кода — номеров слов (1 — 6 — 2a — 8 — 9 — 10 — 5 — 7a — 3 — 4).

Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то он является параллелограммом.

Здесь происходит то же самое, что бывает при предварительной передаче поздравительных телеграмм по стандартным текстам: за каждым номером скрывается целая «цитата» — слово (или даже словосочетание, фраза, абзац).

Итак, суть дела заключается в том, что запись в памяти обратной теоремы, поданной сразу же после прямой теоремы, осуществляется, минуя нижний буквенный код, сразу на втором (верхнем) словесном коде с помощью команд, отсылающих, скажем, к номерам аббревиатур (всего 13 цифр и букв — условных носителей информации второго кода).

Учителям известно, что при раннем использовании символического изображения прямой и обратной теорем может совершаться еще более экономный «скачок», уже через два уровня в иерархии кодов.

Если запоминание прямой теоремы ( $A \rightarrow B$ ) требовало восприятия и записи в памяти 75 букв (на уровне знаков), или 10 слов (на уровне слов), то обратная теорема уже записывается посредством всего лишь ... трех знаков ( $B \rightarrow A$ ), где  $B$  — основание,  $A$  — следствие.



Таким образом, в представлениях об этажной переработке информации можно найти одно из глубочайших научных оснований под-  
твердившихся на практике преимуществ одновременного изучения взаимосвязанных понятий и операций, или, что то же самое, — обучение укрупненными единицами усвоения.

Изучая на малом интервале времени, чаще всего в пределах одного урока, группы взаимосвязанных понятий, преобразований, теорем, определений, связанных друг с другом формально и по содержанию, осуществляем — на языке кибернетики — передачу информации как бы законченными фразами или более длинными последовательностями символов, что должно повышать надежность передаваемой информации.

Предельно упрощая суть дела, можно сказать так: при обучении надо возможно больше составлять взаимосвязанных упражнений из небольшого числа носителей информации (букв, цифр, слов, линий, знаков), меняя лишь комбинацию или пространственное положение их, иногда вводя минимум новых элементов. Совместное решение взаимосвязанных упражнений приведет к возникновению обобщенной информации, крупной единицы усвоения.

Данный вывод подтверждается на практике при обучении в начальной и средней школе; при рассматриваемой системе учащиеся меньше допускают ошибок, быстрее продвигаются в учении, прочнее запоминают материал, развивается самостоятельность их мышления.

Приведем в заключение несколько примеров, в которых показано, как следует совмещать сходные или контрастные правила, суждения, т. е. пользоваться свернутыми формами умозаключений:

1. Сумма квадратов  $\frac{\text{сторон параллелограмма}}{\text{ребер параллелепипеда}}$  равна сумме квадратов его диагоналей.

2.  $\frac{\text{Сумма}}{\text{Произведение слагаемых}} \cdot \text{сомножителей}$  не изменяется от перестановки местами

3. Если при увеличении одной величины в несколько раз другая  $\frac{\text{увеличивается}}{\text{уменьшается}}$  во столько же раз, то эти величины называются  $\frac{\text{прямо}}{\text{обратно}}$  пропорциональными.

4. График  $\frac{\text{показательной}}{\text{логарифмической}}$  функции располагается  $\frac{\text{выше}}{\text{ниже}}$   $\frac{\text{оси абсцисс}}{\text{оси ординат}}$



5.  $\frac{\text{Причастным}}{\text{Деепричастным}}$  оборотом называется  $\frac{\text{причастие}}{\text{деепричастие}}$  с зависящими словами.

6. Реакции, в которых тепло  $\frac{\text{выделяется}}{\text{поглощается}}$  данными веществами, называются  $\frac{\text{экзо}}{\text{эндо}}$  термическими и т. п.

Разумеется, на уроке эти двоякие суждения прочитываются (анализируются) дважды, читаются нередко разными учащимися, однако важно фиксировать соответствующую буквенную информацию начиная с низшего кода (на уровне знаков!) в подобной экономической форме (на доске, в тетрадях, в учебниках): повторяющиеся слова записываются (стало быть, воспринимаются зрительно) лишь один раз.

Мы до сих пор рассматривали особенность обучения укрупнением единицы усвоения в плане информационных представлений. Рассматривая данную проблему в системе понятий формальной логики, мы найдем, что укрупнение единицы усвоения знания достигается прежде всего применением приемов обращения или обобщения суждений.

Нередко оказывается вполне уместным и выгодным использование обоих приемов в одном комплексном задании.

Так, например, в нашем опыте экспериментального обучения оказалось весьма эффективным сочетать изучение во II классе единой таблицы умножения и деления в пределах 100 с одновременным выполнением тех же действий с круглыми десятками и над соответствующими именованными числами.

По этой системе на одних и тех уроках решаются примеры и задачи, сводящиеся к следующим операциям:

$6 \cdot 4$	$24 : 6$	$24 : 4$
$60 \cdot 4$	$240 : 6$	$240 : 40$
$40 \text{ коп.} \cdot 6$	$2 \text{ руб. } 40 \text{ коп.} : 6$	$2 \text{ руб. } 40 \text{ коп.} : 40 \text{ коп.}$
$4 \text{ кг} \cdot 60$	$2 \text{ ц } 40 \text{ кг} : 60$	$2 \text{ ц } 40 \text{ кг} : 4 \text{ кг}$

(учителя Басанова Е. С., Мазина К. Л., Лазарева М. А. и др.; 1965—1966).

А ведь по традиционной системе указанные примеры решались разрозненно по меньшей мере в трех различных темах: «Таблицы умножения и таблицы деления в пределах 100» (II класс); «Умножение и деление круглых десятков» (III класс); «Умножение и деление именованных чисел» (III и IV классы).

В нашей практике изучения аналитической геометрии в пединституте (1963—1966 гг.) геометрические образы рассматривались сразу и на плоскости и в пространстве.



Пусть решена следующая прямая задача:

1а. Дана прямая уравнением  $2x - 3y + 6 = 0$ . Найти вторые координаты точек:  $A_1(-2; y_1)$ ,  $A_2(x_2; 4)$ , лежащих на этой прямой.

Ответ.  $A_1(-2; \frac{2}{3})$ ;  $A_2(3; 4)$ .

На основе решенной прямой задачи составляется и решается обратная задача как логическое продолжение прямой задачи:

1б. Найти уравнение прямой, проходящей через точки:

$A_1(-2; \frac{2}{3})$ ;  $A_2(3; 4)$ .

Первокурсник при такой постановке задачи преодолевает поистине «интригующую ситуацию»: получим ли при решении обратной задачи долженствующее быть уравнение прямой  $2x - 3y + 6 = 0$ ?

Однако же и этого мало. Студенты далее самостоятельно (на том же занятии) обобщают обе задачи на три измерения:

2а. Прямая задача.

Дана плоскость уравнением  $2x - 3y + z + 6 = 0$

и три точки этой плоскости своими двумя координатами:

$A_1(-2; \frac{2}{3}; z)$ ;

$A_2(3; y_2; -6)$ ;

$A_3(x_3; 1; 3)$ .

Найти третьи координаты этих точек:  $z_1, y_2, x_3$ .

2б. Обратная задача

Даны три точки координатами:

$A_1(-2; \frac{2}{3}; 0)$ ;

$A_2(3; 2; -6)$ ;

$A_3(-3; 1; 3)$ .

Написать уравнение плоскости, проходящей через эти три точки.

Математическая операция усваивается лучше всего не повторением однообразных примеров, а вскрытием структурных особенностей элементов операции, выявлением многообразия в едином посредством изменения формы упражнения.

Практика показывает, что такой метод имеет особо важное значение при усвоении основных правил и результатов, входящих в фонд оперативной памяти (таблицы сложения и умножения, производных и интегралов, канонических уравнений линий и поверхностей и т. п.).

Например, для лучшего запоминания таблицы сложения в I классе совершенно недостаточно повторения результатов:  $1 + 2 = 3$ ,  $1 + 3 = 4$  и т. д.; гораздо эффективнее метод, когда поочередно каждый элемент записи (суждения) становится искомым:  $2 + ? = 5$ ,  $? + 3 = 5$ ,  $2 + ? = 5$ ,  $2 + 3 = ?$  и т. д.

Проблема укрупнения единицы усвоения знаний решается преимущественно дидактическими средствами через целесообразное введение новых форм упражнений.



Этот путь отнюдь не исключает, а сочетается с логическими (собственно математическими) средствами достижения той же цели, как-то: ранним введением символов и алгебраизацией арифметики, освоением в школе векторного аппарата, геометрических преобразований, основных понятий математического анализа.

Эффект ускорения обучения, достигаемого последним путем, объясняется тем, что в этих условиях каждая элементарная логическая операция становится информационно более емкой.

## 15. О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМНЫХ ВОПРОСАХ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

Наша школа осуществляет переход к новым учебникам и программам.

После достаточно долгого и основательного обсуждения в основном утверждены программы, издаются и изданы разные варианты учебников...

Освоение новых программ и приспособленных к ним стабильных учебников — процесс длительный и сложный.

В то же время желательная устойчивость основных пособий в наш век бурного роста научной информации едва ли может быть сохранена столь долго, как нам хотелось бы.

Сложность построения и освоения школой эффективной системы обучения усугубляется наличием еще не решенных (а нередко даже конкретно не поставленных) общих и частных проблем методики математики и, быть может, поспешностью уже узаконенных решений.

Главное из них, на наш взгляд, заключается в крайней трудности совершенно необходимого сочетания формальнологического и психологического аспектов обучения составителями программ и авторами учебников.

Обсудим в этом плане некоторые дискуссионные вопросы методики.

Согласно новым программам в I классе оставлено изучение лишь двух действий — сложения и вычитания.

Принято же было до этого изучать в I классе четыре действия.

Перенос действий второй ступени во II класс «компенсировано» теперь изучением всех случаев сложения и вычитания в пределах 100.

(Примеры вида  $68 + 27$ ,  $95 - 27$  теперь решаются в I классе, а не во II, как было раньше.)

Хорошо это или плохо?

В самом деле, что важнее для I класса: охват всех случаев сложения и вычитания всех пар чисел в пределах 100 или знакомство с четырьмя действиями арифметики, объединенными в две структуры, за которыми тянутся определенные группы задач, специальные формы умозаключения...

Важные вещи  
ка практикой.  
В сложнейше  
ваши алгебраич  
ния изолирован  
длинся.  
Скажем, при  
задач, решение  
На первый вз  
и практики, алге  
смысла.  
Вполне возмо  
дася в глаза,  
главной связи.  
Не случайно  
без позитивных п  
преобразований  
вая установка»  
В настоящее  
изучение задач  
Преследуя, с  
ние задач по это  
и структурной  
чений изучаетс  
ли охвата много  
во → уравнение  
ся и т. п.).  
По-видимому  
сов, когда, отк  
чать их сосре  
при изучении  
выражениям и  
задачи же отн  
их достаточно м  
порождающим  
Предлагаем  
ной проверки  
математическо  
образованиях  
По-видимому  
налагать друг  
Об этом м  
вопроса о ра  
1 По данны  
за 1965/66 учеб  
ошибки были до



Важные вопросы методики могут быть правильно решены только практикой.

В сложившейся практике изучения тождественных преобразований алгебраических выражений произливается линия «увязывания» изолированных преобразований с задачами, к ним приводящимися.

Скажем, при изучении умножения многочленов изучают такие задачи, решение которых связано с умножением многочленов.

На первый взгляд все тут нормально: соблюдена связь теории и практики, алгебраического выражения и задачи, символики и смысла.

Вполне возможно, что это лишь внешняя связь, легко бросающаяся в глаза, неосновная связь, которая маскирует отсутствие главной связи.

Не случайно проф. А. Я. Хинчин констатировал (к сожалению, без позитивных предложений), что «во всем разделе алгебраических преобразований полностью отсутствует какая бы то ни было целевая установка» [41, стр. 115].

В настоящее время как изучение самих преобразований, так и изучение задач растягивается на годы.

Преследуя, скажем, две цели (умножение многочленов и решение задач по этой теме), мы не достигаем в должной мере ни одной: ни структурной целостности преобразований (умножение многочленов изучается без своей полноты разложения на множители), ни охвата многообразных методов работы над понятиями «тождество  $\rightarrow$  уравнение  $\rightarrow$  задача» (задачи лишь решаются, не составляются и т. п.).

По-видимому, следует рассмотреть иной вариант обоих вопросов, когда, отказавшись от конгломерата различных понятий, изучать их сосредоточенно, структурно целостными комплексами: при изучении преобразований уделить основное внимание самим выражениям и структуре обратимости алгебраических операций; задачи же отнести к теме уравнений и их систем, где и изучить их достаточно многопланово, в связи не только с уравнениями, но и порождающими эти уравнения тождествами.

Предлагаемый вариант требует тщательной экспериментальной проверки, поскольку поразительно долго «проблемой № 1» математической подготовки остается вопрос о тождественных преобразованиях<sup>1</sup>.

По-видимому, структуры знаний разной природы не следует налагать друг на друга: нельзя совмещать несовместимое.

Об этом можно сказать еще и так: при решении центрального вопроса о расположении материала важно руководствоваться по-

<sup>1</sup> По данным Министерства просвещения РСФСР, в контрольных работах за 1965/66 учебный год «в операциях, связанных только со сложением дробей, ошибки были допущены у 39,9% семиклассников» [36, стр. 50].



ложением диалектики об определяющем значении внутренних связей, скрытых от теоретического анализа, перед бросающимися в глаза внешними связями.

По-видимому, в дидактике нередко второе принимают за первое. Оптимальное расположение отобранного материала не стало еще предметом глубокого изучения педагогов, а ведь от этого зависит многое: будет ли цепь мыслей (ассоциаций) развертываться и расти, подобно живой нити, или ее постигнет судьба недоговоренной фразы: не дорастая до устойчивой, целостной мысли, она рассыплется на несвязанные обрывки, легко теряемые по ходу обучения.

По предложению академика А. Н. Колмогорова сейчас изучение арифметической и геометрической прогрессии будет предшествовать показательной и логарифмической функции, что обеспечит не только логическую, но и психологическую базу для изучения этих функций.

К сожалению, таких шагов по более удачному расположению учебного материала сделано еще мало.

В силу неопределенности критериев при решении этого вопроса заметны и колебания авторов программ.

Приведем один пример.

Так, программной комиссией вначале удачно была найдена следующая группировка материала:

«Формула сокращенного умножения и разложение на множители:  $(a \pm b)^2$ ;  $(a \pm b)^3$ ;  $(a + b)(a - b)$ ».

(«Математика в школе», 1967, № 1.)

Однако через год это место видоизменили так:

«Формулы сокращенного умножения:  $(a \pm b)^2$ ;  $(a + b)(a - b)$ ;  $(a \pm b)^3$ ;  $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ . Примеры разложения на множители».

(«Математика в школе», 1968, № 2.)

Если толковать последнюю фразу в соответствии с контекстом как требование изучать разложение на множители лишь некоторых из указанных выражений, то этот шаг едва ли будет содействовать целостности и устойчивости знаний по данному разделу.

Проблема оптимального расположения материала (что изучать в связи с чем) является острой, неразрешенной проблемой и для высшей школы.

Скажем, по курсу высшей математики предлагаются разными авторами самые различные схемы, вплоть до следующей: аналитическая геометрия на плоскости  $\rightarrow$  дифференциальное исчисление  $\rightarrow$  интегральное исчисление  $\rightarrow$  аналитическая геометрия в пространстве [23].

Остановимся еще на одном противоречии обучения.

Следующий пример вначале кажется тривиально простым. Первоклассники овладевают алгоритмом решения основных



уравнений на нахождение неизвестных компонентов, например:

$$\begin{aligned}x + 3 &= 8, \\x &= 8 - 3, \\x &= 5.\end{aligned}$$

Нахождение корня осуществляется согласно тяжеловесному правилу: «Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое».

Вопрос заключается в следующем: надо ли решать в IV классе с помощью таких правил более сложные уравнения вида:

$$\begin{aligned}2x - 40 &= 96, \\(y - 10) : 5 &= 8?\end{aligned}$$

Мы называли это правило тяжеловесным потому, что семиклассник, не успев понять свойства уравнений, начисто забывает эти шесть правил!

Ему теперь достаточно знать два свойства уравнений, чтобы справляться с любыми уравнениями: срабатывает спасительный механизм забвения ненужной информации!

В связи со сказанным возникает и такой вопрос: надо ли решать несложные арифметические задачи в 2—3 действия в начальной школе с помощью подобных уравнений?

Противоречие это далеко не из простых.

На практике же на первое отвечают — да, на второе — нет.

Оправдано ли такое расхождение?

Интуитивно ясно, что на второй вопрос найден школой верный ответ: чрезмерно ранняя формализация простого, понятного делает его сложным, непонятным.

Быть может, и на первый вопрос должен быть дан такой же отрицательный ответ, который освободил бы немало времени для учащихся IV—V классов.

Методистов и авторов учебных пособий должно серьезно насторожить следующее высказывание академика А. Н. Колмогорова, носящее поистине диагностический характер: «На базе современной школьной выучки отличить истинный талант от умеренных, но хорошо культивированных способностей я не вижу возможности» [17].

Здесь затрагивается вопрос не столько о сумме знаний, отобранных для обязательного изучения в школе, сколько в первую очередь вопрос о неблагополучии в методах обучения, в системе знаний, которые сами по себе не могут стать средствами познания.

Изменится ли существенно положение дела с развитием интеллекта школьника после появления в программе по математике дифференциалов и интегралов, элементов теории вероятностей и т. п., если структура упражнений останется прежняя?

Имеются основания полагать, что только на путях структурного обновления системы упражнений, достижения качественного



обогащения их приемами, изложенными выше, можно перейти, выражаясь образно, от элементаризма знаний к системности, целостности и обобщенности знаний учащихся.

## 16. ВЫВОДЫ

Наше исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Для сложившейся к настоящему времени методики обучения математике характерны следующие черты: строго линейная последовательность расположения материала, раздельное изучение взаимосвязанных понятий, подача учебной информации малыми дозами, преимущественно аналитический характер упражнений, малый удельный вес творческих заданий, обобщение понятий в конце изучения темы. Все это приводит к тому, что лишь наиболее развитым в математическом отношении учащимся удается постигнуть внутренние связи изучаемых понятий различных разделов учебного курса и овладеть логикой учебного предмета.

У многих учеников из числа успевающих по математике наблюдается разрозненность усвоенных знаний, логическая неупорядоченность, неполнота, т. е. ограниченное понимание отдельных теорем, операций и понятий, что особенно ярко выступает на приемных экзаменах в высшее учебное заведение. И это происходит при условии значительной затраты учебного времени как в классе, так и в домашней самостоятельной работе.

Сложившийся метод преподавания математики вступает в противоречие с общим направлением новых учебных программ, основная идея которых заключается в улучшении математического развития учащихся на основе сочетания повышения логического уровня преподавания с его возможно большей наглядностью и ориентацией на органическую связь с применением математических знаний в разносторонней деятельности учащихся.

2. Основным элементом процесса обучения является упражнение. Упражнение как результат деятельности обучающего представляет сложную программу воздействия на ученика, преследуя достижение конкретных дидактических целей.

Результат обучения определяется местом упражнения в системе обучения, структурой упражнения, содержательностью, многообразием и взаимосвязью его составных частей. Эти стороны упражнений не могли проявиться в полной мере в действующей до сих пор методике обучения, поскольку роль упражнений в ней была принижена, а их структура и содержание обеднены.

Рационализация процесса обучения на основе усовершенствования системы упражнений приведет к повышению как качества усвоения знаний, так и математического развития учащихся. Такое преобразование охватит и логику учебного процесса.



3. Важнейшим этапом такого усовершенствования системы обучения является укрупнение дидактической единицы усвоения знаний посредством обогащения ее новыми структурными элементами. В результате этого упражнение приобретает логическую целостность и повышается успешность обучения.

Исследование проблемы укрупнения дидактической единицы усвоения знаний требует раскрытия следующих особенностей системы упражнений:

- а) своеобразия логической структуры;
- б) психофизиологической картины усвоения знаний;
- в) проявления кибернетических закономерностей экономного хранения и приращения информации мозгом человека, быстрой и надежной ее переработки и выдачи.

Укрупнение единицы усвоения знаний в информационном плане достигается двумя диалектически противоположными путями:

а) посредством расщепления тривиальной формы упражнения на множество взаимосвязанных преодолевается недостаток информации для исходных, простых, базисных операций (например, вместо одной формы  $3 + 2 = ?$  предлагаются одновременно такие:  $? + 2 = 5$ ,  $3 ? 2 = 5$ ,  $3 + ? = 5$ ,  $3 + 2 = 5$ );

б) посредством объединения множества родственных упражнений уменьшается избыточность информации для выводных, составных операций (например, вместо отдельных уравнений и неравенств  $f(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$  предлагается упражнение  $f(x) \geq 0$ ).

В обоих случаях знания обретают структурную целостность, но с той лишь разницей, что в первом случае мы проникаем внутрь знания, делая его тем самым сложным, а во втором случае изолированные, разрозненные до этого знания превращаем во взаимосвязанные между собой элементы.

Укрупнение дидактической единицы усвоения знаний развивает способность учащегося схватывать сразу несколько явлений или предметов, экономно расходовать носителей информации (символов, слов, фраз), способствуя повышению информационной емкости их, что в конечном счете приводит к ускорению усвоения материала и к экономии времени.

Практическое применение в школе принципа укрупнения единицы усвоения знаний позволяет пройти программный материал с экономией времени до 20% против общепринятых ныне норм, отраженных в учебных планах и программах.

Некоторые конкретные предложения по реализации сформулированных выше положений нашли отражение в новых программах по математике.

Метод укрупнения единицы усвоения знаний нашел наиболее четкое преломление в новых программах для начальной школы (I—III классы) и лишь частичное отражение в программе восьмилетней школы.



Дальнейшая разработка и планомерное внедрение данной методической системы в массовую школу требуют организационных мер и усилий не только методистов, но и специалистов по психологии, физиологии, кибернетике.

4. Преобразование системы упражнений, а вместе с тем и всей системы обучения должно быть произведено многопланово.

В логическом плане очень важно обеспечить сочетание индукции и дедукции, анализа и синтеза, достижение диалектического единства противоположных в том или ином отношении представлений и сопутствующих им форм рассуждений.

В психологическом плане — изменение методов обучения в связи с возрастными особенностями учащихся.

В педагогическом аспекте — постоянное раскрытие перспективы учения и забота об углублении понимания и применения ранее усвоенного, обеспечении естественных связей новых знаний со старыми.

Сочетание анализа с синтезом означает, во-первых, усиление внимания к завершающему этапу выполнения упражнений — контролю и проверке решения (достижение тем самым цикличности процесса усвоения), во-вторых, одновременное изучение некоторых взаимно обратных или сходных понятий, в-третьих, самостоятельную работу над исходным обобщенным упражнением, в-четвертых, выполнение деформированных упражнений (в частности, метод обратных задач) — вот те эффективные, но мало используемые сейчас дидактические средства укрупнения единицы усвоения знаний, позволяющие существенно повысить производительность педагогического труда.

5. Одной из причин перегрузки учащихся в настоящее время является избыточное повторение, тренировка в выполнении однообразных упражнений.

Рассматриваемая система обучения позволяет в известной мере преодолеть этот недостаток посредством количественно меньших, но информативно более содержательных заданий, выполнение которых связано с большим числом выборов знаков, действий, понятий, суждений, ходов мыслей из нескольких возможных.

6. Рассматриваемая система обучения создает благоприятные условия для наращивания новых этажей знаний вокруг основного представления.

При сравнительном изучении в пределах небольшого промежутка времени взаимосвязанных понятий (взаимно обратных действий, задач, теорем, функций, противоположных или сходных преобразований, операций, аналогичных или контрастных явлений из области физики, химии, логически связанных грамматических категорий и т. д.) развивается в полной мере любознательность детей, пылкость их мысли. Это проявляется в самостоятельности суждений учащихся за пределами изучаемого, в опережении ими хода рассуждений учителя, в предвидении результатов и т. п.

Результаты  
1959 гг.) по пр  
и других исс  
з также многоч  
ные в печати в с  
казывают ее акт  
Как убеждае  
ния учебники  
сов [55 — 58],  
и алгебры для  
дидактической  
время, но этот  
Характерист  
что структурно  
ком интервале  
8. Следует  
его перспектив  
Первые на  
1960—1962 гг.  
1962].  
Впоследств  
дивших и под  
Выводы, со  
жаты также  
В связи с  
позволяет ши  
кругах прояв  
Проблема  
дидактическое  
лась возможн  
физике [51],  
9. Степень  
системы опре  
всю гамму ме  
танный для  
Наблюден  
говорят, что  
находит в св  
нение ее не  
тельной спос  
ко были слу  
после одной  
ционным пр  
Процесс  
постепенным  
накопления



7. Результаты широкой проверки описанной методики в условиях обучения специальных экспериментальных классов (1961—1969 гг.) по программам и учебникам, созданным автором, данные других исследователей, перепроверявших наши предложения, а также многочисленные отзывы и отклики учителей, опубликованные в печати в связи с обсуждением проблемы (после 1962 г.), показывают ее актуальность для школы.

Как убеждает опыт автора, создавшего в ходе своего исследования учебники (учебные материалы) по математике для I, IV классов [55—58], а также экспериментальные учебники арифметики и алгебры для V—VIII классов, соблюдение принципа укрупнения дидактической единицы усвоения позволяет значительно экономить время, но этот фактор пока недооценивается педагогической наукой.

Характеристика времени в данном случае имеет тот смысл, что структурно-связанные вопросы должны располагаться на кратком интервале времени.

8. Следует сказать несколько слов об этапах исследования и его перспективах.

Первые наши публикации по данной проблеме относятся к 1960—1962 гг. [44, 45, 47—1960]; [46—1961]; [48, 49, 52—1962].

Впоследствии появились сообщения других авторов, подтверждавших и поддерживающих выводы, полученные нами.

Выводы, солидарные в общем с нашими предложениями, содержатся также в ряде кандидатских диссертаций.

В связи с переходом на новые программы, структура которых позволяет шире использовать описанную методику, в учительских кругах проявляется к ней все больший интерес.

Проблема укрупнения единицы усвоения знаний имеет общедидактическое значение. В некоторых наших работах рассматривалась возможность такого подхода к другим учебным предметам: физике [51], химии [50], русскому языку [54].

9. Степень успеха при применении изложенной методической системы определяется тем, насколько полно употребляет учитель всю гамму методических средств, весь набор упражнений, разработанный для этой системы.

Наблюдения работы учителей, применявших данную систему, говорят, что если учитель активно овладевает данной системой, находит в своих устремлениях поддержку и содействие, то применение ее не предполагает ни особой виртуозности, ни исключения ее способности учителя, ни большого напряжения сил. Однако были случаи, когда отдельные учителя в силу разных причин после одной-двух неудачных проб возвращались снова к традиционным приемам работы.

Процесс проведения эксперимента, как правило, сопровождается постепенным изменением взглядов учителей и методистов по мере накопления ими собственного опыта.



Каждый учитель, пытающийся критически разобраться в особенностях предлагаемой методики, вынужден преодолеть в себе противоречия между своими прежними представлениями, берущими начало из методических взглядов, вынесенных им еще из педагогического училища или института и упроченных в годы работы по действующим ныне программам и учебникам, с одной стороны, и теми новыми соображениями, которые должны стать предметом его глубоких размышлений, с другой стороны.

\* \* \*

Общие вопросы методики математических упражнений изложены нами в первой части книги.

В последующих частях мы рассматриваем в основном логическую сторону проблемы, «технику дела», иллюстрируя изложение рассмотрением методики изучения некоторых разделов курса арифметики, алгебры и геометрии.

Ради экономии места мы уделяем меньше внимания вопросам, достаточно подробно рассмотренным в существующих методических пособиях: методике введения новых математических понятий и методике аналитических упражнений.

Мы касаемся этих вопросов лишь в том случае, когда они связаны с основной темой книги.

Следует напомнить, что концентрированное изложение в книге основной проблемы ни в коей мере не означает стремления автора преувеличивать значение описанных приемов и методов или недооценивать другие формы и методы обучения.

Так, например, применение противопоставления как дидактического принципа уже предполагает, что оно применяется не ко всяким математическим понятиям, а лишь к тем, которые логически связаны.

Успех дела обучения в конечном счете решается органическим сочетанием традиционных методов обучения, испытанных вековым опытом учителей, с новыми, в частности, с теми методами, описанию которых посвящена настоящая книга.

Можно указать  
1) сначала  
2) сначала  
3) совместно  
В новых учебниках  
иной мере  
понятием «обыч-

мание в IV кл.  
Объем сведений  
изучению десяти  
обширный; так  
до сокращения  
кратко.

В этом плане  
его рассматривают

а) Сравнение  
Сравнение

б) Основное  
Изменение

задачей впра-

в) Сокращение  
Сокращение

Однако в э-

ческое содержание

на разных уро-

Между тем

в экономии

чении этих в

же уроках.

<sup>1</sup> Изучение  
изложено в пер-

арифметике и



## ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Можно указать три варианта изучения действий над дробями:

- 1) сначала изучаются обыкновенные дроби, потом десятичные<sup>1</sup>;
- 2) сначала изучаются десятичные дроби, потом обыкновенные;
- 3) совместное изучение десятичных и обыкновенных дробей.

В новых учебниках для IV класса, вышедших в 1970 г., в той или иной мере отправляются от первоначального ознакомления с понятием «обыкновенная дробь», чтобы затем уделить основное внимание в IV классе действиям над десятичными дробями.

Объем сведений по обыкновенным дробям, предшествующий изучению десятичных дробей, в некоторых учебниках довольно обширный; так, в пробном учебнике [29] этот материал доводится до сокращения дроби, а в [6] — до приведения к общему знаменателю.

В этом плане интересен пробный учебник [6], в одной главе его рассматриваются следующие пары вопросов:

а) Сравнение обыкновенных дробей (§ 100).

Сравнение десятичных дробей (§ 110).

б) Основное свойство дроби (§ 103).

Изменение величины десятичной дроби при переносе в ней запятой вправо и влево на несколько знаков (§ 113).

в) Сокращение обыкновенной дроби (§ 104).

Сокращение десятичной дроби (§ 111).

Однако в этой книге преобразования, имеющие одно и то же логическое содержание, разведены по разным параграфам и изучаются на разных уроках, одно после другого.

Между тем реальный выигрыш в качестве усвоения знаний и в экономии времени можно получить лишь при совмещенном изучении этих вопросов внутри одной темы, зачастую на одних и тех же уроках.

<sup>1</sup> Изучение дробей по этой системе, но на основе метода противопоставления изложено в первом издании книги П. М. Эрдниева «Методика упражнений по арифметике и алгебре» («Просвещение», 1965).



Осторожность методистов по данному вопросу имеет причиной отсутствие подробного психологического анализа особенностей такой системы.

Система обучения, направленная на выработку умения четко схватывать две формы одного и того же содержания, не противоречит современным научным представлениям о мышлении.

Однако указанное умение требует специальной отработки: обучение по этой системе «двойного совмещения» будет наиболее успешным в IV—V классах при условии, если в I—III классах учащиеся обучались по той же методической системе<sup>1</sup>.

Верно и обратное: для учащихся, которые в I—III классах совместно изучали сложение и вычитание, умножение и деление, прямую и обратную задачу на целых числах и т. п., будет нетрудно одолеть и новое уплотнение материала, а именно совместное изучение тех же пар операций, но сразу в двух формах записи — в виде обыкновенных и десятичных дробей.

Стало быть, второй подход не отрицает противопоставления взаимно обратных операций (сложения и вычитания и т. п.), а является логическим продолжением той же линии укрупнения единицы усвоения.

Учитель должен понимать центральную, ведущую роль противопоставления контрастных операций.

Например, становясь впервые на этот путь, он может вначале освоить хотя бы противопоставление взаимно обратных операций внутри каждой из отдельно изучаемых тем: «Десятичные дроби», «Обыкновенные дроби».

Однако еще больший выигрыш во времени и в качестве знаний он получит, если то же осуществит при совмещении последних тем в одну.

Различие этих двух видов «совмещений» заключается также в следующем: в случае одновременного изучения взаимно обратных действий используется единство и перенос преобразований не только на смысловом уровне, но и на символическом уровне; например, не только словесное правило сложения порождает противоположное правило вычитания, являющееся преобразованной формой первого, но запись (алгоритм) сложения непосредственно превращается в запись (алгоритм) для вычитания.

В случае совместного изучения обыкновенных и десятичных дробей формальные способы преобразования информации (записи) разные, но они связаны по смыслу, по содержанию, взаимно подкрепляя друг друга совпадением ответов:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{4 + 15}{20} = \frac{19}{20} = \frac{95}{100} = 0,95, \quad 0,2 + 0,75 = 0,95;$$

<sup>1</sup> Подробное изложение данной системы для начальной школы содержится в наших книгах [55—59].



$$\frac{1}{5} = 0,2; \quad \frac{3}{4} = 0,75.$$

Значит, совместное изучение обыкновенных и десятичных дробей приносит «дополнительную осмысленность» выкладкам и суждениям за счет возникновения качественно новых обратных связей в мышлении: ответ одного решения контролируется решением того же примера в другой форме записи, и наоборот. Исключительно важным достижением этой методики является значительное сокращение числа основных правил, которые будут теперь выводиться (доказываться) только один раз, а не два раза, что имеет место при любом варианте раздельного изучения обыкновенных и десятичных дробей.

Так, например, правило нахождения дроби от числа заучивается один раз; задача же решается в двух формах.

Чтобы найти дробь  $\left(\frac{3}{4} = 0,75\right)$  от числа (40), надо это число умножить на данную дробь:

$$40 \cdot \frac{3}{4} = \frac{40 \cdot 3}{4} = 30, \quad 40 \cdot 0,75 = 30.$$

Аналогично сказанному распространение законов (переместительного, сочетательного, распределительного) на дробные числа, изучение уравнений, зависимости между компонентами и результатами действий, основные виды задач (на движение, на проценты и т. д.) будут изучаться при таком варианте сосредоточенно и основательно.

Последнее же позволяет уделить больше времени решению задач, создает возможность естественного переноса центра тяжести с самого начала обучения на вычисления с десятичными дробями.

Эта система принесет и новые элементы в методику, например: раннее введение округления чисел, элементы приближенных вычислений.

Вывод может быть один: методика совместного изучения обыкновенных и десятичных дробей заслуживает серьезного внимания учителей и детальной разработки, как обладающая преимуществами перед любым вариантом раздельного изучения их.

В последующем изложении мы попытаемся раскрыть дидактические преимущества совместного изучения обыкновенных и десятичных дробей.

## 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ДРОБЕЙ, ИХ ЗАПИСЬ И ЧТЕНИЕ

На доске вычерчивается отрезок, длина которого равна единице и который делится на несколько равных частей, например на 6 (рис. 14).

Выясняется, что в единице содержится шесть шестых части, что записывается так:  $1 = \frac{6}{6}$ .



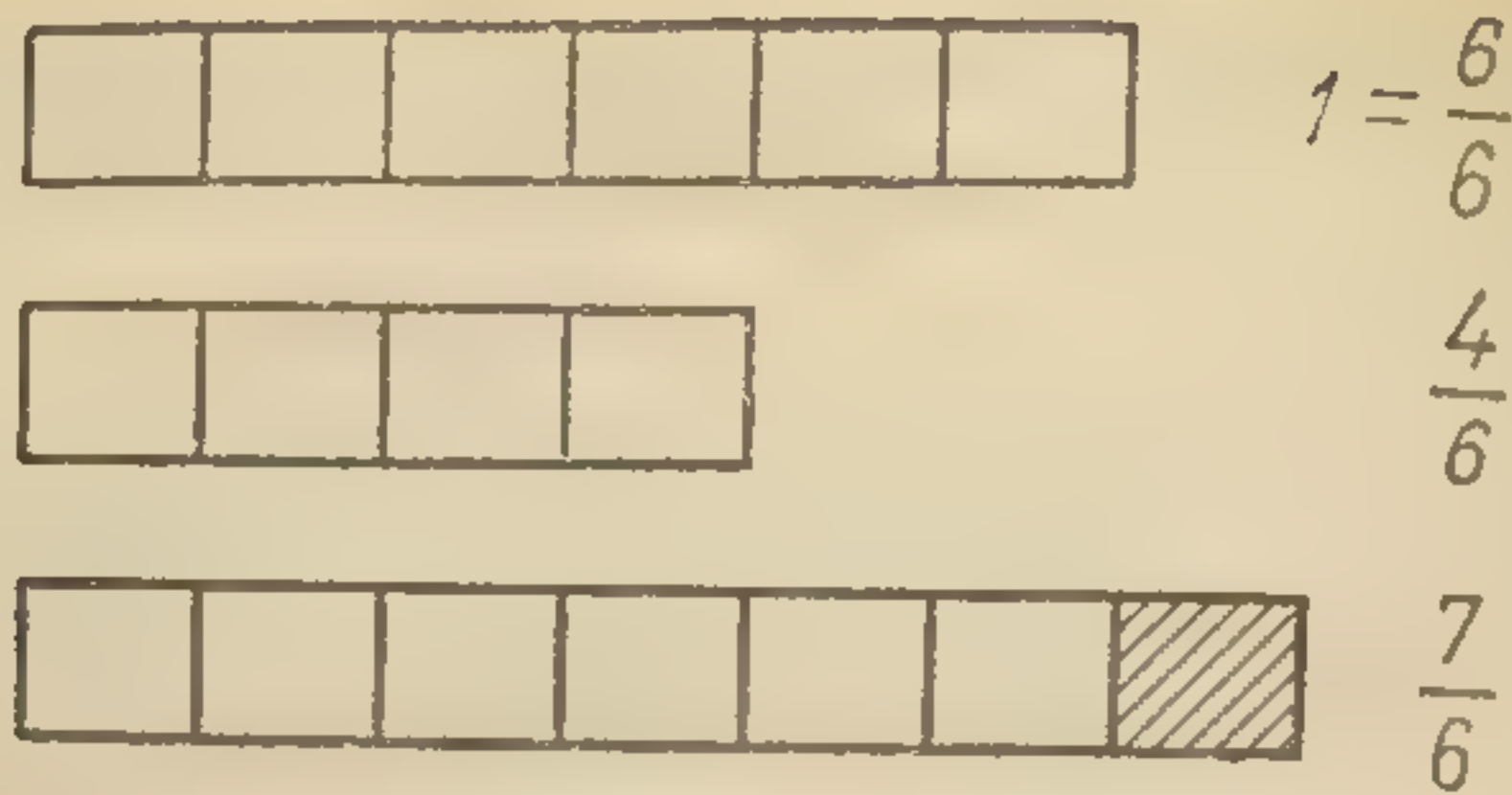


Рис. 14

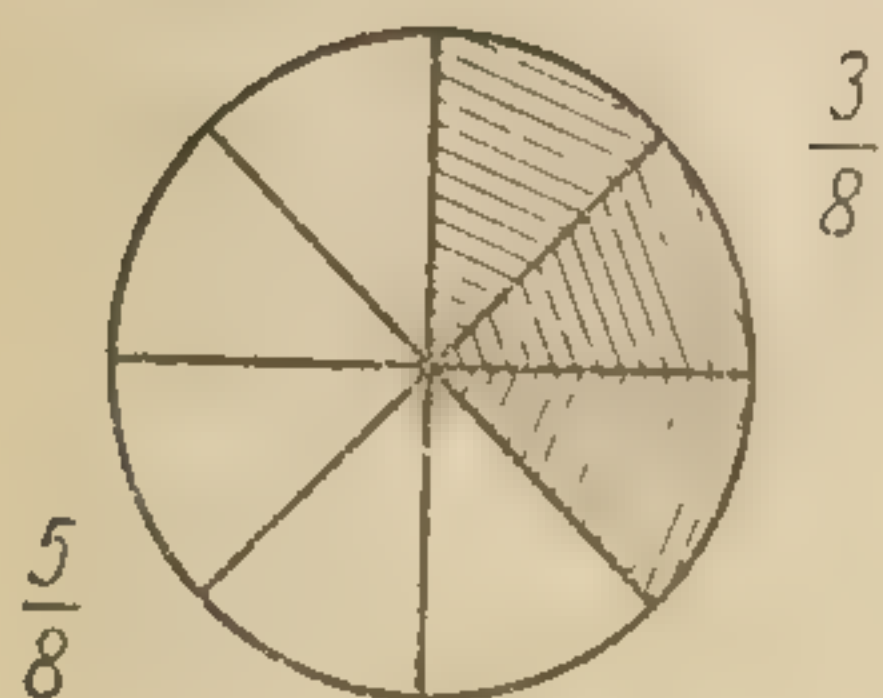


Рис. 15

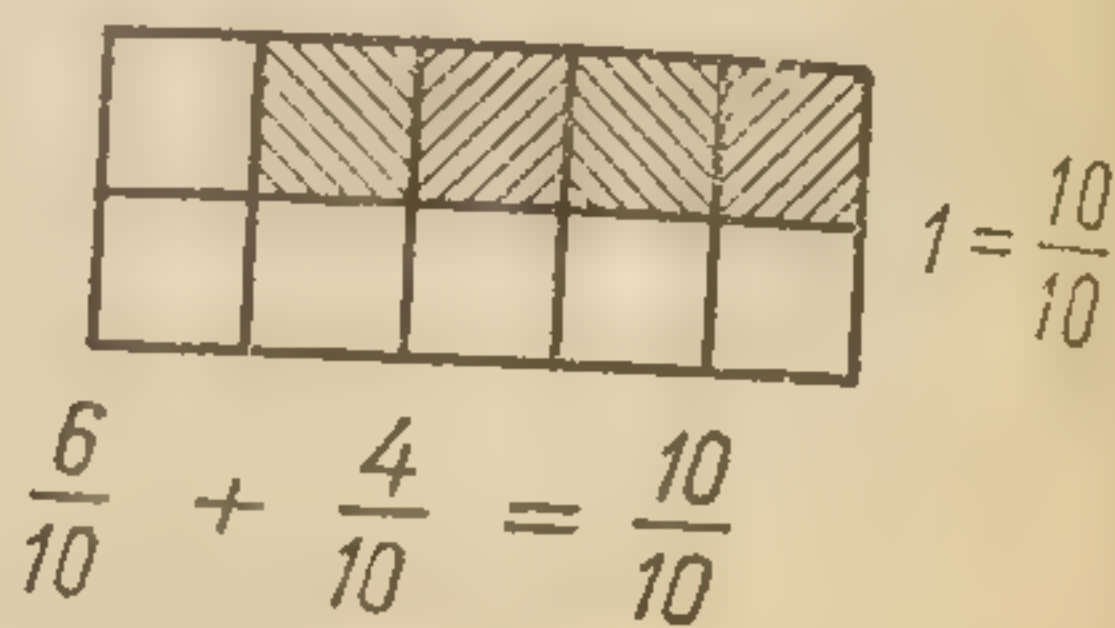


Рис. 16

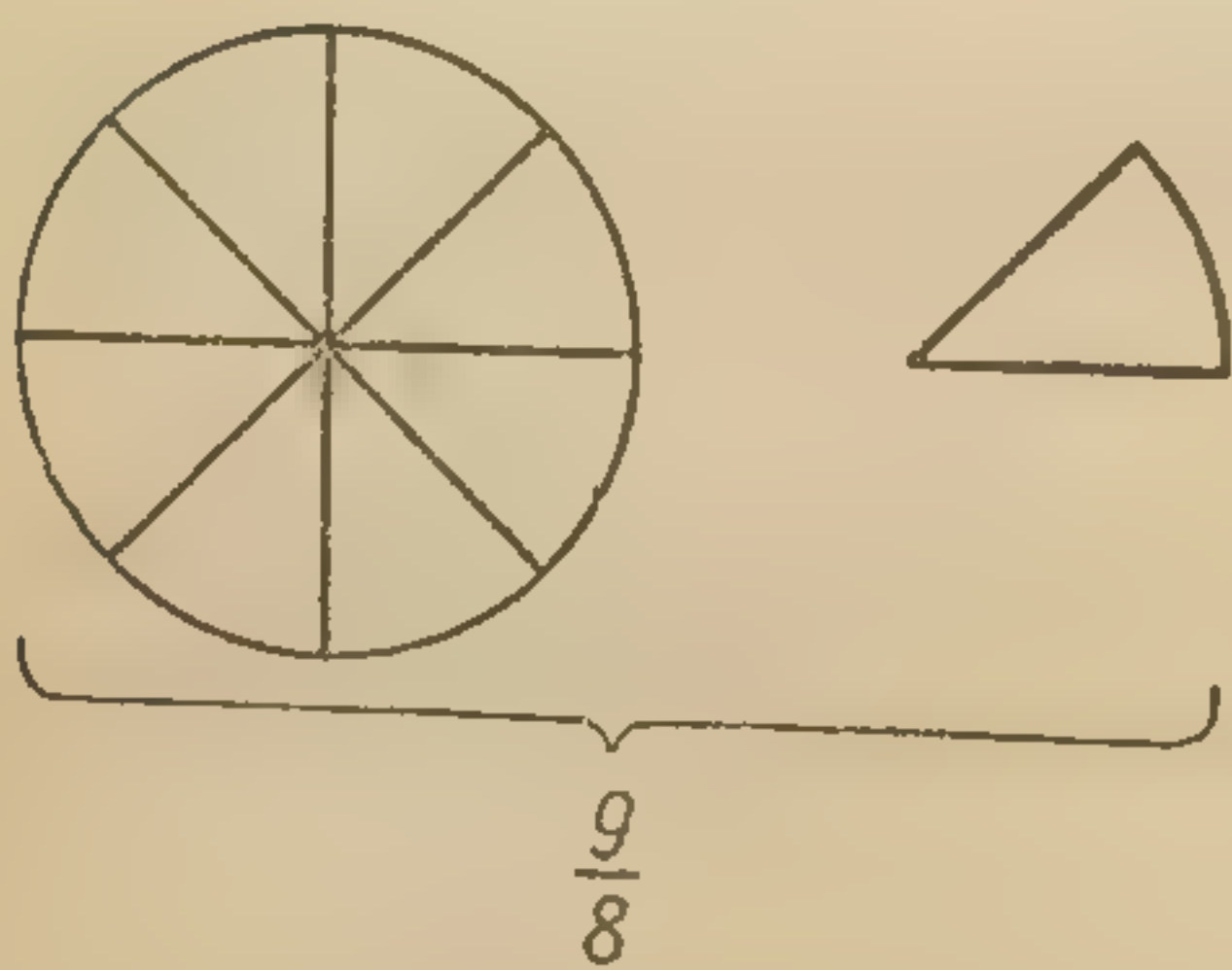


Рис. 17

Если взять четыре таких доли, то получается дробь  $\frac{4}{6}$ ; семь таких долей образуют число  $\frac{7}{6}$ .

Для иллюстрации дробей можно использовать круги, прямоугольники и их части, вырезанные из картона или бумаги (рис. 15, 16, 17, 18).

Белых частей  $\frac{5}{8}$  круга; заштрихованных частей  $\frac{3}{8}$  круга (рис. 15).

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1; \quad \frac{8}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \quad (\text{рис. 16 и 17}).$$

При введении понятия «дроби» предлагаются упражнения двух видов:

1) По рисунку, имеющемуся на доске или в книге, назвать дробное число и записать его.

Например, по рисунку 15 ученик должен определить, что там изображено пять восьмых круга, и написать:  $\frac{5}{8}$ .

2) Предлагается учащимся нарисовать в тетрадях круг или прямоугольник и заштриховать  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$  этой фигуры.

Уже на бере  
взять действия с  
бой (конечно, без  
основе «здорового  
в одном круге во  
 $1 = \frac{8}{8}$ ; да еще  
мая доля; восемь  
девять восьмых

Прямоугольн  
 $1 = \frac{4}{4}$ ; из них  
четвертых:  $\frac{4}{4}$

На первом ж  
суммы целой ча  
деформированны

$$1 \div \frac{1}{8} = 1 \frac{1}{8};$$

$$2 \div \frac{2}{5} = 2 \frac{7}{10};$$

$$3 \div \frac{5}{6} = 3 \frac{5}{6};$$

При введении  
средством стано  
= 100 см; 1 дм

Следует чаще  
ными в двух еди  
рах) (рис. 19).

Дециметры

Дециметры

Сантиметры

Десятичная  
представляет е  
ты, а в строчку  
ной части за



Уже на первом уроке можно записывать действия сложения и вычитания дробей (конечно, без всяких правил, только на основе «здравого смысла»), например, так: в одном круге восемь восьмых доли; пишу:  $1 = \frac{8}{8}$ ; да еще отдельно дана одна восьмая доля; восемь восьмых да одна восьмая — девять восьмых доли:  $\frac{8}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$  (рис. 17).

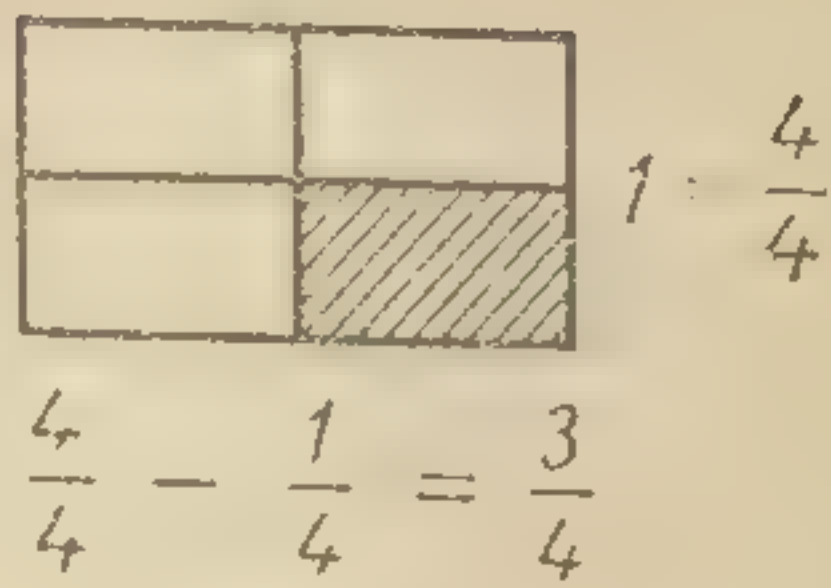


Рис. 18

Прямоугольник разделен на четыре четвертых доли; пишу:  $1 = \frac{4}{4}$ ; из них одна доля закрашена. Остается белых долей три четвертых:  $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  (рис. 18).

На первом же уроке вводится запись смешанного числа в виде суммы целой части и дробной, причем немедленно используются деформированные упражнения:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{8} &= 1\frac{1}{8}; & 1\frac{1}{8} - \frac{1}{8} &= 1; \\ 2 + \frac{?}{?} &= 2\frac{7}{10}; & ? - \frac{3}{10} &= 4; \\ ? + \frac{5}{6} &= 3\frac{5}{6}; & ? - 9 &= \frac{1}{5} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

При введении понятия «десятичная дробь» основным наглядным средством становятся десятичные меры (например,  $1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см}$ ;  $1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$  и т. д.).

Следует чаще использовать числовой луч с делениями, нанесенными в двух единицах (внизу — в сантиметрах, сверху — в дециметрах) (рис. 19).

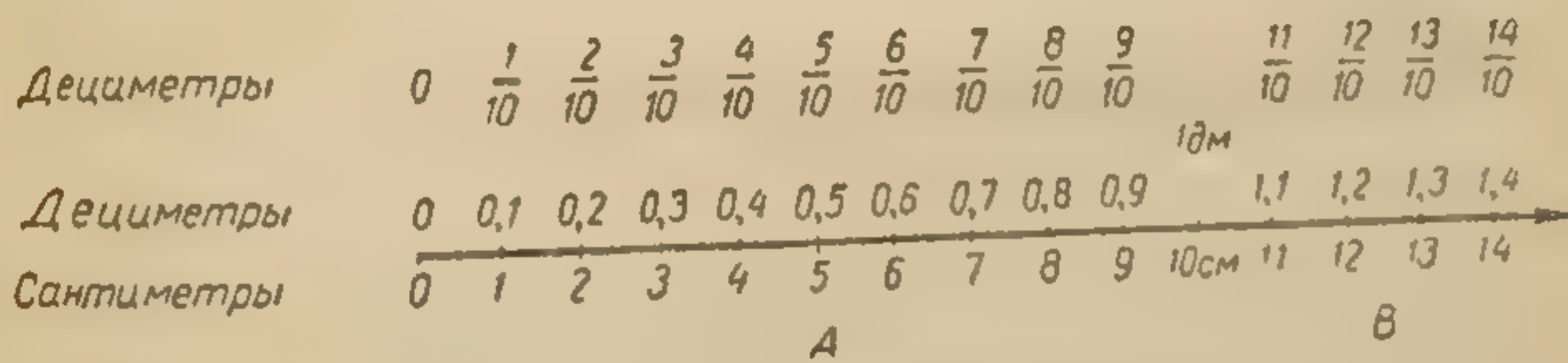


Рис. 19

Десятичная дробь вводится как дробь, знаменатель которой представляет единицу с нулями, но записанными без дробной черты, а в строчку: целая часть в десятичной дроби отделяется от дробной части запятой.



Сравниваем: в обыкновенной дроби целая часть выделяется от дробной части лишь большей величиной цифр:  $23 \frac{7}{10}$ .

Вначале осваивается двусторонняя запись десятичных единиц измерения:

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм}, \text{ значит, } 1 \text{ дм} = \frac{1}{10} \text{ м};$$

$$1 \text{ м} = ? \text{ см}, \text{ значит, } 1 ? = \frac{1}{100} \text{ м};$$

$$1 \text{ кг} = ?, \text{ значит, } 1 ? = \frac{1}{?} \text{ кг};$$

$$? \text{ ц} = ? \text{ кг}, \text{ значит, } 1 \text{ кг} = \frac{1}{?} \text{ ц и т. д.}$$

Хороши также следующие упражнения:

$$16 \text{ коп.} = \frac{16}{100} \text{ руб.}; \quad 305 \text{ мм} = \frac{305}{?} \text{ м};$$

$$? \text{ коп} = \frac{63}{100} \text{ руб.}; \quad ? \text{ м} = \frac{661}{?} \text{ км};$$

$$? \text{ кг} = \frac{37}{?} \text{ ц}; \quad 83 \text{ см}^3 = \frac{?}{?} \text{ дм}^3;$$

$$109 \text{ кг} = \frac{?}{1000} \text{ т}; \quad 14 \text{ см}^2 = \frac{14}{?} \text{ м}^2 \text{ и т. д.}$$

На вводных уроках знакомим учащихся со следующими понятиями: «числовой луч» (начинающийся с нуля и направленный вправо); «Точка на числовом луче»; «координата точки на числовом луче» (число, соответствующее точке на луче).

Уместно практически решить две задачи:

**Прямая задача.** На луче дана точка  $A$  (рис. 20). Написать ее координату в дециметрах:  $A(0,6)$ .

**Обратная задача.** Обозначить на луче точку, координата которой дана:  $B(1,2)$  (рис. 20).

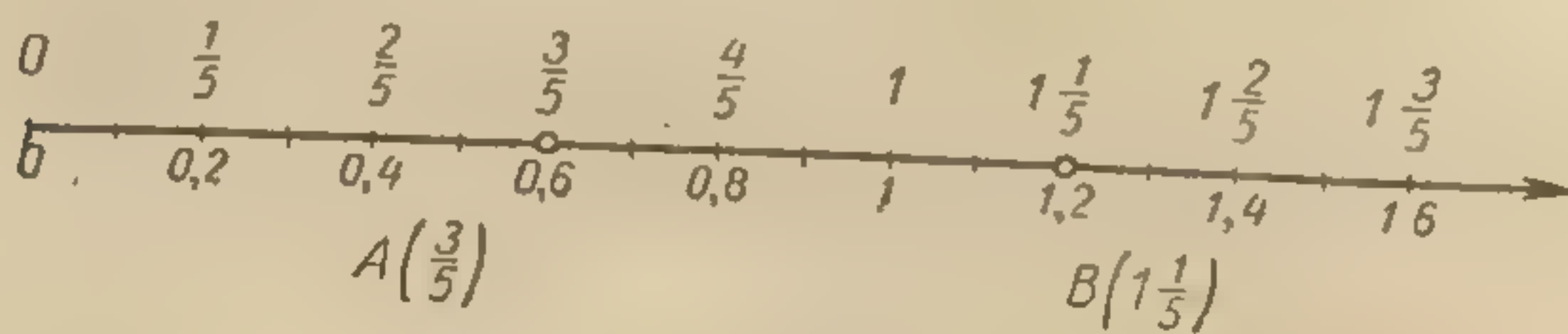


Рис. 20

Поучительно решить те же задачи на числовом луче, координаты которого даны в двух формах: в виде десятичных и обыкновенных дробей.



Далее осваиваем запись именованных чисел в трех формах:

$$7 \text{ дм } 3 \text{ см} = 7 \frac{3}{10} \text{ дм} = 7,3 \text{ дм};$$

$$8 \frac{7}{10} \text{ м} = 8,7 \text{ м};$$

$$9 \text{ руб. } 29 \text{ коп.} = 9 \frac{29}{100} \text{ руб.} = 9,29 \text{ руб.};$$

$$0 \text{ руб. } 56 \text{ коп.} = \frac{56}{100} \text{ руб.} = 0,56 \text{ руб.};$$

$$0 \text{ м } 730 \text{ мм} = \frac{730}{1000} \text{ м} = 0,73 \text{ м};$$

$$5 \text{ руб. } 23 \text{ коп.} = 5 \frac{23}{100} \text{ руб.} = 5,23 \text{ руб.};$$

$$3 \text{ т } 601 \text{ кг} = 3 \frac{601}{1000} \text{ т} = 3,601 \text{ т};$$

$$21 \frac{31}{100} \text{ ц} = 21,31 \text{ ц};$$

$$3 \text{ м}^2 \text{ } 16 \text{ дм}^2 = 3,16 \text{ м}^2;$$

$$5 \text{ дм}^3 \text{ } 19 \text{ см}^3 = 5,019 \text{ дм}^3 \text{ и т. д.}$$

Решение таких упражнений имеет исключительно важное значение как для осмысленного владения новой для учащихся символикой, так и для повторения десятичных мер.

Пусть дана дробь  $\frac{327}{100}$ .

Представим ее так:

$$\frac{327}{100} = \frac{300}{100} + \frac{20}{100} + \frac{7}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} = 3 \text{ целых} + 2 \text{ десятых доли} + 7 \text{ сотых доли.}$$

Таким образом, десятичную дробь можно выразить как сумму целого числа и нескольких десятичных дробей, представляющих десятые, сотые и т. д. доли.

Точно так же целое число можно изобразить в виде суммы единиц различных разрядов:

$$327 = 3 \text{ сотни} + 2 \text{ десятка} + 7 \text{ единиц.}$$

Так как десятичная дробь представляет собой сумму целых чисел и десятых, сотых и т. д. долей, то ее можно записывать в строку, отделяя запятой целую часть числа от дробной части числа, а название знаменателя (т. е. название долей) будет зависеть от числа цифр после запятой.



Рассмотрим таблицу:

Целая часть			Дробная часть		
сотни	десятки	единицы	десятые доли	сотые доли	тысячные доли
	2	3	7	0	4

Левее запятой стоит число 23 — это 23 целых.

Правее запятой на первом месте стоит цифра 7 — семь десятых; на втором месте стоит цифра 0 — нуль сотых; на третьем месте стоит цифра 4 — это четыре тысячных. Запишем эту дробь: 23, 704.

Для того чтобы ученики научились правильно писать и читать десятичные дроби, важно создавать ассоциации двусторонние: количество десятичных знаков → название дроби и название дроби → количество десятичных знаков.

На этом этапе изучения дробей полезно предлагать вопросы двух видов:

1. Десятичная дробь содержит сотысячные доли. Сколько цифр будет записано после запятой? Придумать пример. (Решение задачи основано на цепи умозаключений: сто тысяч → пять нулей в нем → пять цифр после запятой, например: 3,07061.)

2. После запятой написаны четыре цифры. Назвать знаменатель дроби. Какие доли в этой дроби? Придумать пример. (Решение основано на последовательности ассоциаций: четыре цифры → четыре нуля → десять тысяч → десятитысячные доли, например: 5, 0062; читаем: 5 целых 62 десятитысячных.)

При изучении десятичных дробей следует широко использовать вычисления на счетах, как основном средстве конкретизации числовых представлений. Для удобства работы со счетами на первое время можно укрепить рядом с проволоками счетов надписи с названиями разрядов и именованных чисел (рис. 21).

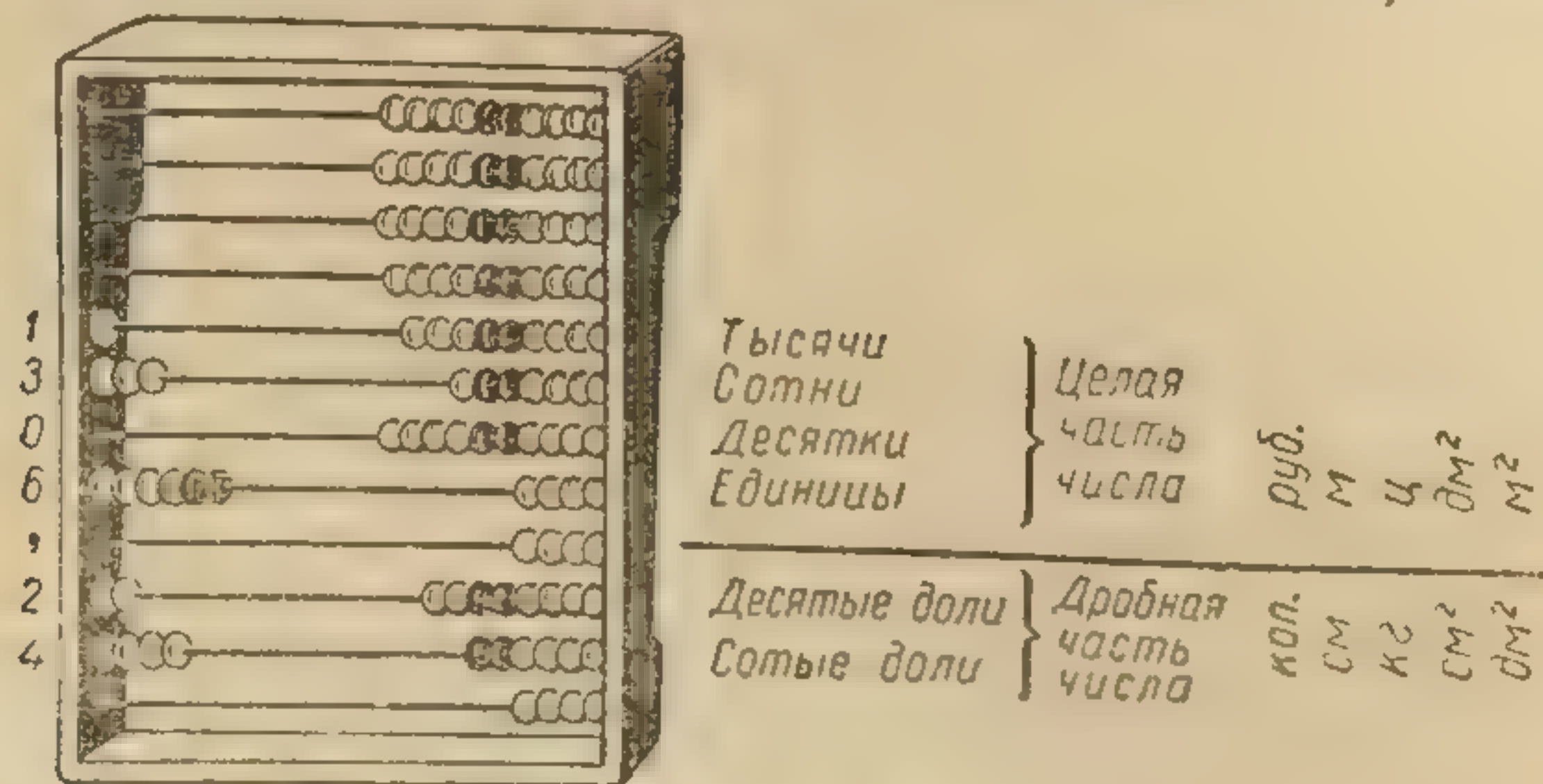


Рис. 21

Уже на первых  
дроби следует трени  
Важно при этом  
способами, повтор  
1306,24 и и.т.д.  
1306,24 руб. и  
1306,24 м или  
В другом случа  
в перекодировке  
ки — м, м — мм

В учебнике «А  
дических пособи  
двукратного изм  
сколько раз, а п  
Между тем ос  
ственно, как изм  
личины.

Об изменении  
несколько раз о  
с изучением ум  
если, например,

личения знамен  
удобная запис

уже деление др  
Сказанное е





Уже на первых уроках одновременно с записью и чтением дробей следует тренировать учащихся в откладывании десятичных дробей на счетах.

Важно при этом тренировать учащихся в чтении чисел разными способами, повторяя попутно десятичные меры.

1306,24 ц или 1306 ц 24 кг;

1306,24 руб. или 1306 руб. 24 коп.;

1306,24 м или 1306 м 24 см.

В другом случае используются для тех же целей тысячные доли в перекодировке на пары десятичных единиц:  $т — кг$ ,  $кг — г$ ,  $км — м$ ,  $м — мм$ ,  $дм^3 — см^3$ ,  $м^3 — дм^3$ .

### 3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

В учебнике «Арифметика» И. Н. Шевченко, как и в других методических пособиях, основное свойство дроби выводится на основе двукратного изменения дроби: сначала дробь увеличивают в несколько раз, а потом ее уменьшают во столько же раз.

Между тем основное свойство дроби удобнее вводить непосредственно, как изменение вида дроби при заведомом сохранении ее величины.

Об изменении величины дроби в зависимости от изменения в несколько раз одного из ее членов удобно говорить позже в связи с изучением умножения и деления дроби на целое число, так как, если, например, требуется записать, что величина дроби  $\frac{2}{3}$  от увеличения знаменателя в 4 раза уменьшилась в 4 раза, то наиболее удобная запись этого преобразования такова:  $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \cdot 4}$ , а это уже деление дроби на целое число.

Сказанное еще раз убеждает в необходимости совместного изу-

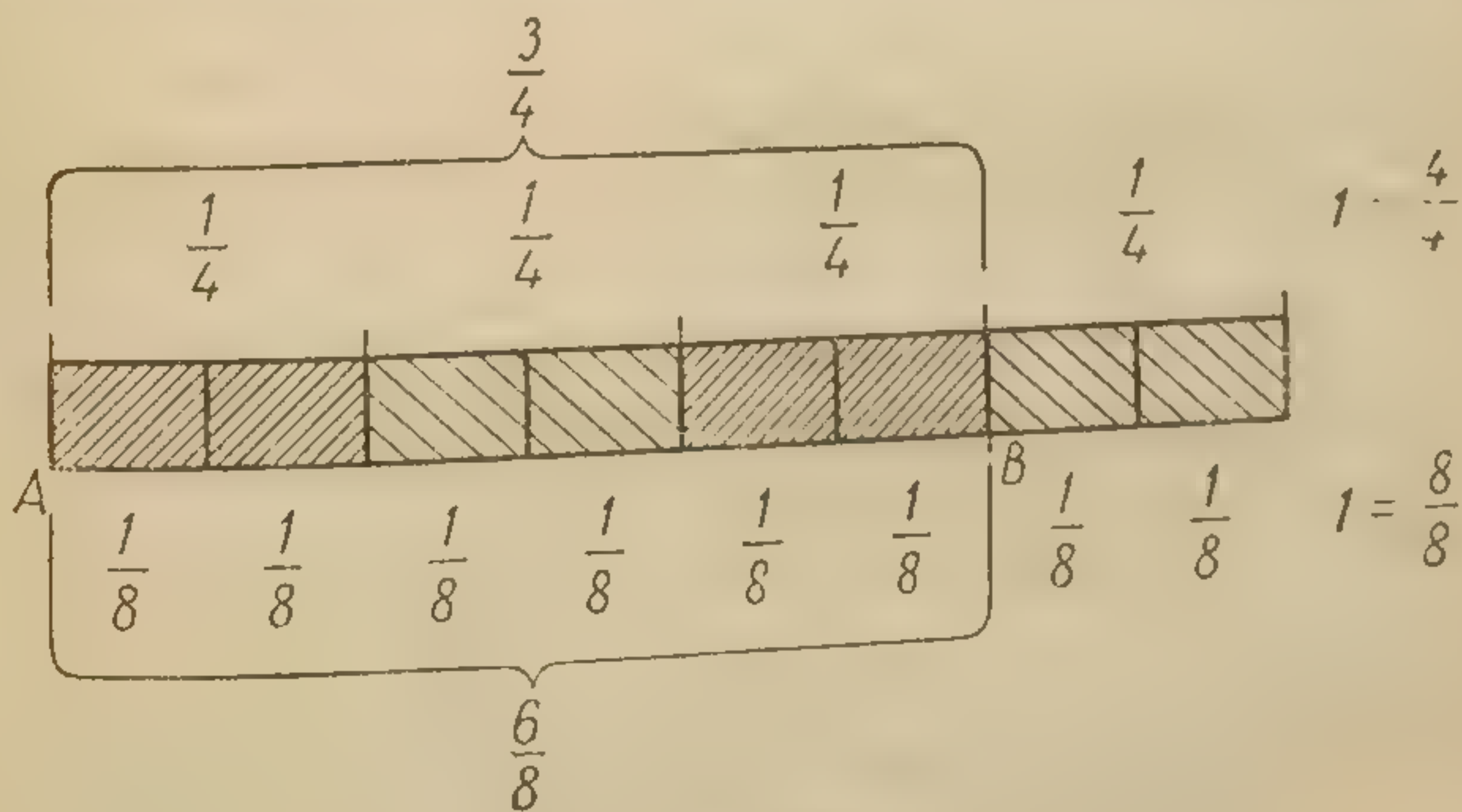


Рис. 22



чения увеличения (уменьшения) дроби в несколько раз и соответственно умножения (деления) дроби на целое число.

Основное свойство дроби изучаем в таком порядке (рис. 22). Приводим беседу. Сколько четвертых долей содержится в единице? (Четыре четвертых доли:  $1 = \frac{4}{4}$ .)

Отделите три четвертых доли отрезка прямой. Поделите каждую четвертую долю отрезка пополам.

Если единицу разделить на восьмые доли, то сколько таких долей содержится в единице? (Восемь восьмых доли:  $1 = \frac{8}{8}$ .)

В одной четвертой сколько восьмых долей? ( $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ .)

В трех четвертых сколько восьмых долей? ( $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ .)  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{6}{8}$  — это равные дроби, так как они изображают длину одного и того же отрезка АВ.

Во сколько раз числитель второй дроби больше числителя первой дроби? (В 2 раза.)

Во сколько раз знаменатель второй дроби больше знаменателя первой дроби? (В 2 раза.) Почему же величина дроби не изменяется? Записываем подробно:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}; \text{ и наоборот: } \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

После того как проведены наблюдения еще на 1—2 аналогичных примерах, формулируем основное свойство дроби:

*Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число.*

Далее проводятся упражнения по размельчению долей и сокращению дробей, рассматриваемых совместно.

Вначале обе операции надо выполнять над одной и той же дробью. Пусть надо заменить две седьмых в 3 раза более мелкими долями.

Решение.  $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$ . Сразу же выполняем обратное преобразование:  $\frac{6}{21} = \frac{6 : 3}{21 : 3} = \frac{2}{7}$ .

Дробь  $\frac{15}{20}$  заменить в 5 раз более крупными долями.

Решение.  $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$ .

Сразу же выполняем размельчение долей:  $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$ .

Записываем в общем виде формулу основного свойства дроби.



## Размельчение

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot X}{B \cdot X}$$

## Сокращение (укрупнение)

$$\frac{A}{B} = \frac{A:X}{B:X}$$

В систему упражнений должны быть включены не только обычные упражнения, но и деформированные, например:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \square}{5 \cdot \square} = \frac{\square}{20}; \quad \frac{18}{45} = \frac{18 : \square}{45 : \square} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{9}{7} = \frac{\square}{35}; \quad \frac{25}{40} = \frac{5}{\square}; \quad \frac{8}{20} = \frac{\square}{5};$$

$$\frac{\square}{5} = \frac{26}{65}; \quad \frac{7}{\square} = \frac{21}{36} \text{ и т. д.}$$

Специально рассматриваем несколько примеров, в которых используется последовательное сокращение дроби:

$$\frac{40}{56} = \frac{40 : 4}{56 : 4} = \frac{10}{14} = \frac{10 : 2}{14 : 2} = \frac{5}{7}; \quad \frac{40}{56} = \frac{5}{7};$$

$$\frac{\frac{5}{60}}{\frac{2}{90}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{3}{18}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, основное свойство дроби надо изучать совместно с сокращением дроби.

Выведенные правила легко переносятся на десятичные дроби. посредством параллельной записи:

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{700}{1000};$$

$$0,7 = 0,700.$$

$$\frac{700}{1000} = \frac{700 : 100}{1000 : 100} = \frac{7}{10};$$

$$0,700 = 0,7$$

Размельчение десятичной дроби.

Величина десятичной дроби не изменится, если сзади нее приписать несколько нулей.

Сокращение десятичной дроби.

Величина десятичной дроби не изменится, если зачеркнуть несколько нулей, стоящих в конце числа.

Уместно тут же пояснить, почему и впереди десятичной дроби можно написать несколько нулей:

$$0,7$$

$$000,70000$$

Запись в нижней строке означает, что в числе 000,700 нет ни сотен, ни десятков, ни сотых, ни тысячных и т. д. долей, а имеется только 7 десятых.



В указанном смысле целое число является частным случаем десятичной дроби:

$$5 = 5,000.$$

Необходимо уделить здесь главное внимание устному превращению в десятичные тех обыкновенных дробей, у которых наиболее употребительные знаменатели: 2; 4; 8; 5; 10; 20; 50; 100; 25.

Соответствующее преобразование осуществляется здесь подбором таких множителей, чтобы знаменателем становилась единица с нулями, например:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 125}{(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)} = \frac{875}{1000} = 0,875;$$

$$\frac{16}{25} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16 \cdot 4}{(5 \cdot 2)(5 \cdot 2)} = \frac{64}{100} = 0,64 \text{ и т. д.}$$

Упражнения по этому разделу удобно предлагать в виде деформированных двойных равенств.

$$5 \text{ м } 60 \text{ см} = ?, ? \text{ м} = 5 \frac{?}{?} \text{ м};$$

$$? \text{ т } ? \text{ кг} = 7,800 \text{ т} = 7 \frac{?}{?} \text{ т} = 7 \frac{?}{5} \text{ т};$$

$$? \text{ км } ? \text{ м} = 0,? \text{ км} = 6 \frac{125}{1000} \text{ км} = 6 \frac{1}{8} \text{ км};$$

$$? \text{ кг } ? \text{ г} = 8,025 \text{ г} = 8 \frac{?}{?} \text{ кг} = 8 \frac{1}{40} \text{ кг};$$

$$? \text{ руб. } ? \text{ коп.} = 9,20 \text{ руб.} = 9 \frac{?}{?} \text{ руб. и т. п.}$$

#### 4. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ ПО ВЕЛИЧИНЕ. ИЗМЕНЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ДРОБИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ЧЛЕНОВ ДРОБИ

При введении сравнения дробей удобно иллюстрировать дроби с помощью полосок бумаги или нарисованных отрезков.

Сначала сравниваются дроби с одинаковыми знаменателями (рис. 23).

Сравнивая длины отрезков, выясняем, что  $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ .

Что одинакового в этих дробях? (Знаменатели.) У какой дроби числитель больше (меньше)? (У первой дроби числитель больше, чем у второй.)



П р а в и л о формулируется в двух видах:

Из двух дробей с равными знаменателями та *больше*, у которой числитель *больше*.

Например:  $\frac{17}{10} > \frac{9}{10}$ ,  
так как  $10 = 10$  и  $17 > 9$ .

Из двух дробей с равными знаменателями та *меньше*, у которой числитель *меньше*.

Например:  $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$ ,  
так как  $3 = 3$  и  $2 < 5$ .

Для вывода правила сравнения дробей с разными знаменателями надо взять дроби, резко различающиеся знаменателями.

Сравниваем дроби:  $\frac{1}{6}$  и  $\frac{1}{3}$  (рис. 24). Шестая часть меньше третьей части:  $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ . Две шестых части будут также

меньше двух третьих части:  $\frac{2}{6} < \frac{2}{3}$ .

Приходим к выводу.

Из двух дробей с общим числителем

та  $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ , у которой знаменатель  $\frac{\text{меньше}}{\text{больше}}$ .

а)  $\frac{2}{6} < \frac{2}{3}$ , так как  $2 = 2$  и  $6 > 3$ .

б)  $\frac{2}{7} > \frac{2}{10}$ , так как  $2 = 2$  и  $7 < 10$ .

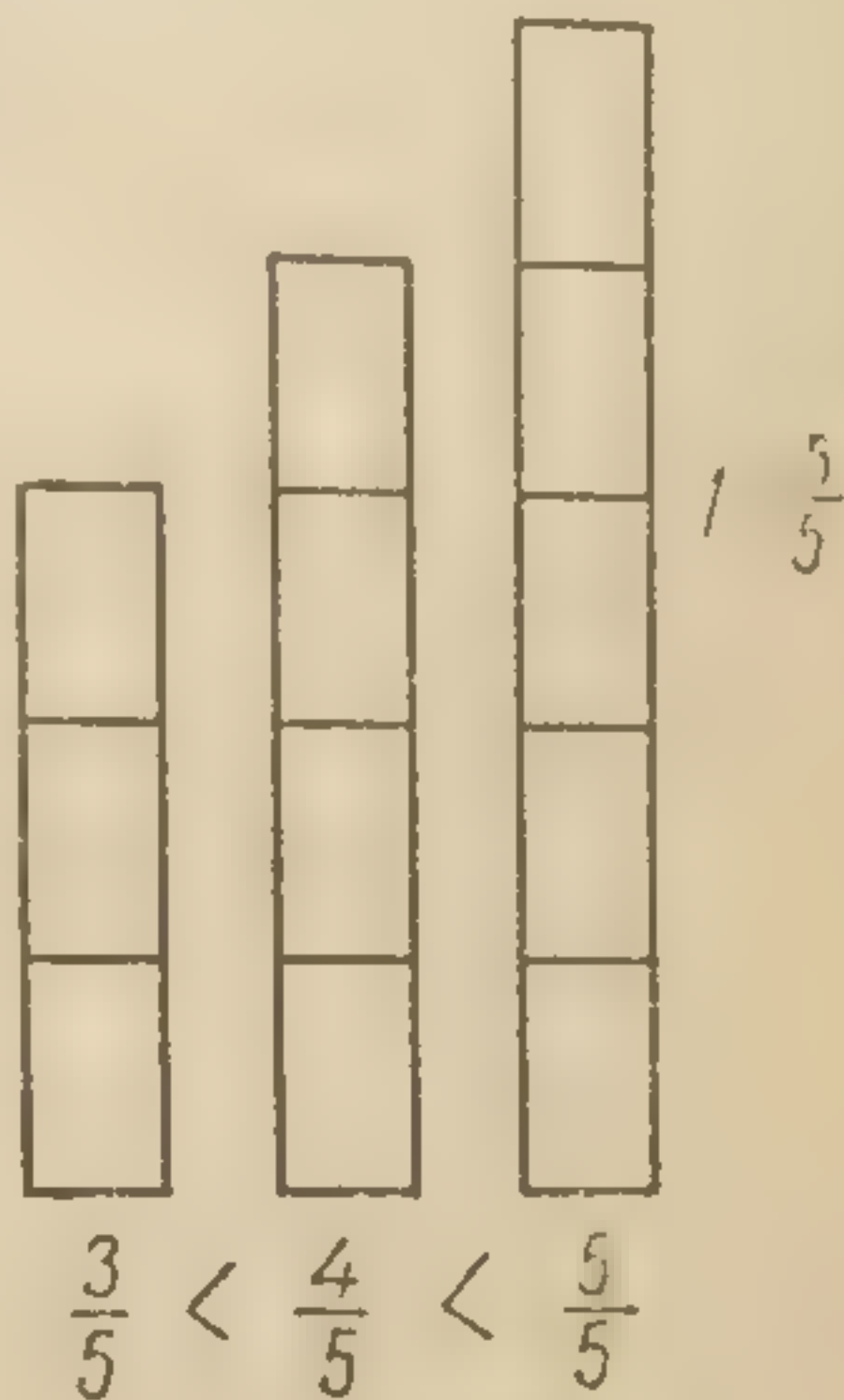


Рис. 23

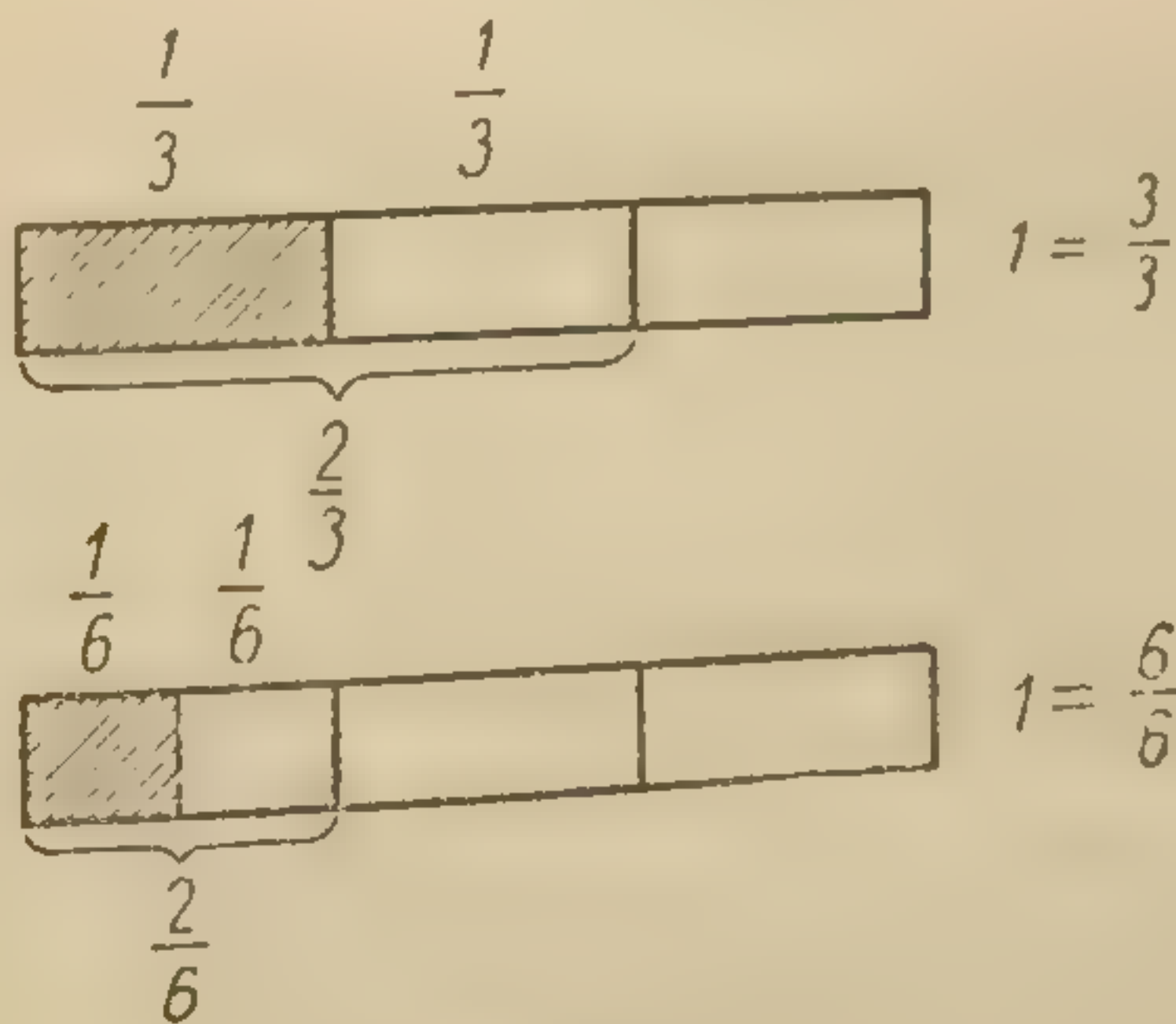


Рис. 24



Уместно предложить учащимся задания в общей форме.  
1. Поставить знак сравнения.  
Объяснить решение:

$$\frac{a+3}{b} ? \frac{a}{b};$$
$$\frac{x}{y} ? \frac{x-4}{y}.$$

2. Верны ли следующие неравенства? Почему?

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{b+5};$$
$$\frac{x}{y-1} > \frac{x}{y}.$$

После изучения темы о сравнении дробей выполняются следующие упражнения:

1. Сравнить дроби с общим знаменателем:

$$\frac{3}{5} \text{ и } \frac{4}{5}; \quad \frac{5}{7} \text{ и } \frac{3}{7}; \quad \frac{7}{10} \text{ и } \frac{5}{10} \text{ и т. д.}$$

2. Сравнить дроби с общим числителем:

$$\frac{6}{9} \text{ и } \frac{6}{8}; \quad \frac{9}{15} \text{ и } \frac{9}{10}; \quad \frac{3}{20} \text{ и } \frac{3}{21}.$$

3. Дописать недостающие члены дроби в следующих выражениях:

$$\frac{9}{10} < \frac{9}{\square}; \quad \frac{6}{5} > \frac{6}{\square}; \quad \frac{\square}{5} > \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{7} < \frac{\square}{7};$$
$$\frac{10}{\square} > \frac{10}{15}; \quad \frac{5}{7} < \frac{5}{\square}; \quad \frac{6}{7} < \frac{\square}{8}; \quad \frac{3}{8} > \frac{\square}{9} \text{ и т. д.}$$

Решение этих упражнений сопряжено для учащихся с преодолением ситуации затруднения, и по этой причине они содействуют глубокому усвоению данной зависимости.

Решение прямого примера на сравнение дробей протекает примерно так:  $\frac{5}{7}$  и  $\frac{3}{7}$ ; их надо сравнить. Эти дроби имеют общий знаменатель ( $7 = 7$ ); из двух дробей с общим знаменателем та больше, у которой числитель больше:  $5 > 3$ , значит,  $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ .

Решение деформированного примера протекает иначе, в форме более сложного рассуждения, например:  $\frac{5}{7} < \frac{5}{\square}$ , данные дроби имеют равные числители; из двух дробей с равными числителями та меньше, у которой знаменатель больше; первая дробь  $\frac{5}{7}$  должна быть меньше второй дроби  $\frac{5}{\square}$ ; значит, знаменатель



7 должен быть больше числа  $\square$ , и наоборот: число  $\square$  меньше числа 7; вместо неизвестного числа  $\square$  можно взять любое число, меньшее 7 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Имеем:  $\frac{5}{7} < \frac{5}{3}$ ;  $\frac{5}{7} < \frac{5}{4}$  и т. д.

Из анализа решения второго примера видно, как важно в математике умение обращать суждения.

*Исходное суждение:* если даны две дроби с одинаковыми знаменателями, причем числитель первой дроби больше числителя второй дроби, то первая дробь будет больше второй дроби.

*Обращенное суждение:* если две дроби имеют одинаковые знаменатели, первая дробь больше второй дроби, то числитель первой дроби должен быть больше числителя второй дроби.

Опыт показывает, что применение только первой (прямой) формы не может обеспечить ученику понимания им второй формы рассуждения.

Применение обеих логических форм является хорошим средством развития математического мышления вообще.

При ознакомлении учеников с приемами сравнения дробей надо предлагать им вопросы и примеры как на одну, так и на другую форму рассуждения.

1. Две дроби имеют равные числители. Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби. Какая дробь больше? Привести пример.

2. Первая дробь больше второй дроби, причем у них числители одинаковы. Знаменатель которой из этих дробей больше? Привести пример.

Удобно иногда предлагать такие неопределенные упражнения с двумя неизвестными элементами:

$$\frac{5}{\square} > \frac{5}{\square}; \quad \frac{\square}{8} < \frac{\square}{8};$$
$$\frac{\square}{10} > \frac{8}{\square}; \quad \frac{5}{\square} < \frac{\square}{7} \text{ и т. д.}$$

В связи с рассмотрением вопроса о сравнении дробей изучается вопрос об изменении величины дроби в зависимости от изменения одного из членов дроби.

Пусть дана дробь  $\frac{5}{8}$ . Увеличим числитель дроби на 2. Получим новую дробь:  $\frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}$ .

Была дробь  $\frac{5}{8}$ , стала дробь  $\frac{7}{8}$ . Эти две дроби имеют общий знаменатель, а числитель второй дроби больше; значит, вторая дробь больше первой дроби:  $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$ .

Рассмотрим обратную задачу. Пусть была дана дробь  $\frac{7}{8}$ . Умень-



шим числитель на 2. Получим дробь  $\frac{7-2}{8} = \frac{5}{8}$ , которая меньше первоначальной дроби:  $\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$ .

Формулируем правило:

Если числитель дроби  $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$ , оставив знаменатель без изменения, то величина дроби  $\frac{\text{увеличится}}{\text{уменьшится}}$ . Аналогично выводится второе правило:

Если знаменатель дроби  $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$ , оставив числитель без изменения, то величина дроби  $\frac{\text{уменьшится}}{\text{увеличится}}$ .

Для закрепления данного материала полезно варьировать логическую форму задания.

1. Дана дробь, числитель ее увеличили на 3. Что будет больше: первоначальная дробь или новая дробь? Привести пример.

2. Дана дробь. После изменения числителя она увеличилась. В большую или меньшую сторону изменили числитель? Привести пример.

3. Знаменатель некоторой дроби уменьшили на 2. Как изменилась дробь: увеличилась или уменьшилась? Привести пример.

4. Когда изменили знаменатель дроби, величина дроби уменьшилась. Что сделали со знаменателем: увеличили или уменьшили его? Привести пример.

Гораздо проще осуществляется сравнение десятичных дробей. Пусть даны две дроби: 3,72 и 3,7256. Для сравнения сначала их приведем к общему знаменателю. Запишем эти дроби друг под другом:

$$\begin{array}{r} 3,7200 \\ 3,7256 \end{array}$$

Мы их привели к десятитысячным. Начинаем сравнивать цифры слева: в обеих дробях по 3 целых; в обеих дробях по 7 десятых; в обеих дробях по 2 сотых; и вот, наконец, доходим до различия; в верхней дроби нет тысячных, а в нижней дроби — 5 тысячных.

Значит,  $3,7200 < 3,7256$ , или  $3,72 < 3,7256$ .

Можно рассуждать и так: знаменатели этих дробей одинаковы (1000), а числитель верхней дроби меньше числителя нижней дроби ( $7200 < 7256$ ):

$$3 \frac{7200}{10000} < 3 \frac{7256}{10000}.$$

Поучительны здесь также упражнения на придумывание дробей, т. е. на дописывание недостающих цифр в следующих записях:

$$8,7??? < 8,7567;$$

$$5,07? > 5,07?;$$

$$0,071 < 0,1?? \quad \text{и т. п.}$$



Важно по данной теме предлагать группы примеров на сравнение обыкновенных и десятичных дробей, связав их с раздроблением и превращением именованных чисел (знаменатели берутся несложные, с тем чтобы можно было решить примеры устно):

$$3\frac{7}{10} ? 3,7; \quad 76 \text{ см} ? \frac{3}{4} \text{ м};$$

$$3\frac{3}{5} ? 3,6; \quad 0,51 \text{ м} ? \frac{1}{2} \text{ м};$$

$$\frac{34}{50} ? 0,75; \quad 6,3 \text{ м} ? 6\frac{1}{5} \text{ м};$$

$$\frac{21}{25} ? 0,83; \quad 20 \text{ кг} ? 0,1 \text{ т}.$$

При изучении сравнения дробей полезно использовать геометрическую иллюстрацию этой операции.

Если число  $a$  расположено на числовом луче  $\frac{\text{левее}}{\text{правее}}$  числа  $b$ , то оно  $\frac{\text{меньше}}{\text{больше}}$  его.

Так, по рис. 20 (стр. 88) устанавливаем, что  $0,6 < 1, 2; \frac{6}{10} < 1\frac{2}{10}$

и т. д.

Если числа расположены в одной и той же точке числовой оси, то они равны:

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad (\text{рис. 20}).$$

## 5. ОКРУГЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

При ознакомлении с правилами округления дробей следует не только сообщить это правило для заучивания, но и показать целесообразность такого правила.

Пусть указана ширина стола — 83 см; требуется округлить эту ширину до десятков сантиметров, т. е. до дециметров.

Можно поступить двумя способами:

1) Округлить в большую сторону:

$$83 \text{ см} \approx 90 \text{ см} (= 9 \text{ дм});$$

2) округлить в меньшую сторону:

$$83 \text{ см} \approx 80 \text{ см} (= 8 \text{ дм}).$$

Который из этих двух способов округления точнее? Точнее тот способ, при котором допущена меньшая ошибка (меньше погрешность).



При первом способе округления ошибка составляет около 7 см ( $83 + 7 = 90$ ); при втором способе мы допускаем ошибку, составляющую примерно 3 см ( $83 - 3 = 80$ ).

Значит, выгоднее округлить в данном случае в меньшую сторону. Рассуждая так, приходим к правилу:

Если первая (слева) отбрасываемая цифра равна 0; 1; 2; 3; 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется; например:  $0,83 \approx 0,8$  и т. д.; если первая (слева) отбрасываемая цифра равна 5; 6; 7; 8; 9, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Например:  $0,86 \approx 0,9$ ;  $7,518 \approx 7,52$  и т. д.

Правило округления чисел, расположенных на участке от 8,0 до 9,0, схематически изображено на рис. 25.

Это правило можно записать так:

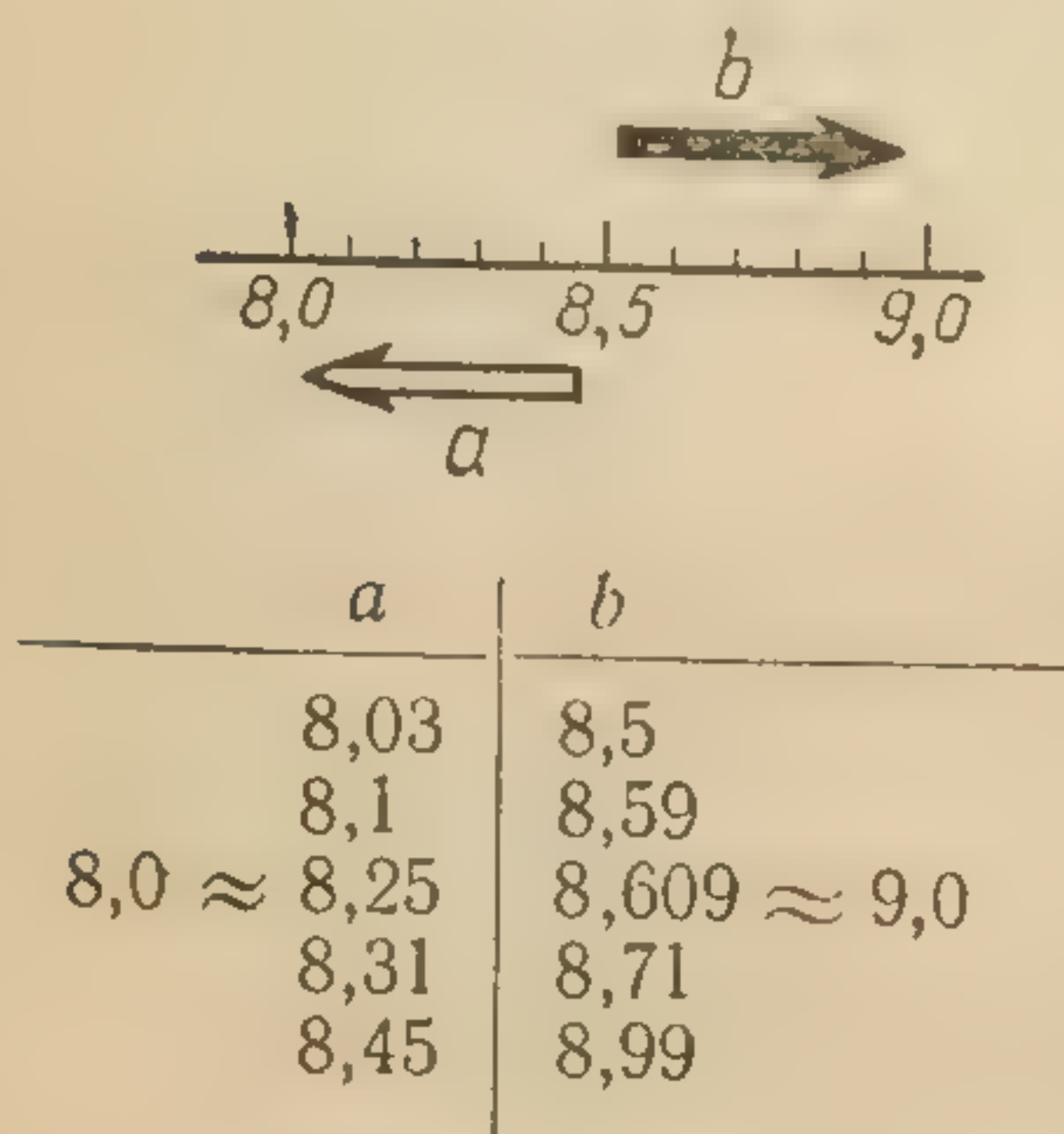


Рис. 25

В упражнениях следует охватить все случаи округления; например, требуется округлить следующие числа до сотых: 7,6023; 5,025; 5,997.

Последний случай интересен тем, что добавление трех тысячных приводит к цепи преобразований:  $5,997 \approx 6,00$ ; на этом примере видно, что округленное число иногда может оканчиваться нулями.

Уяснению сущности правила округления помогают структурно-обратные упражнения.

После округления числа  $3,7 \square$  до десятых долей число оказалось равным 3,7. Какие значения могла принять цифра сотых?  $3,7 \square \approx 3,7$ .

Сколько различных ответов имеет данная задача?

О т в е т.  $3,70 \approx 3,7$ ;  $3,73 \approx 3,7$ ;  
 $3,71 \approx 3,7$ ;  $3,74 \approx 3,7$ .  
 $3,72 \approx 3,7$ ;

Полезно заранее определять количество решений:

$8,3? \approx 8,4$  (пять решений);  
 $8,?? \approx 8,5$  (десять решений).

Возможно предложить несколько упражнений по округлению несложных обыкновенных дробей до целого:

$$6 \frac{3}{8} \approx 6; \quad 6 \frac{5}{8} \approx 7.$$



## 6. ДРОБИ ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ

При введении понятий *правильные* и *неправильные* дроби необходимо использовать противопоставление этих понятий.

Вводятся определения:

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной*.

Правильная дробь меньше единицы.

Например:  $\frac{5}{6} < 1$ ;  $\frac{7}{100} < 1$ ;

$\frac{999}{1000} < 1$  — все эти дроби правильные.

Дробь, у которой числитель равен знаменателю или больше его, называется *неправильной*.

Неправильная дробь равна единице или больше единицы (или говорят: не меньше единицы).

Например:  $\frac{3}{3} = 1$ ;  $\frac{6}{5} > 1$ ;

$\frac{105}{100} > 1$ ;  $\frac{1000}{1000} = 1$  — все эти дроби неправильные.

Упражнения по данной теме предлагаются в следующих вариантах:

1. Какая дробь называется неправильной (правильной)? Придумать несколько таких дробей.

2. Назовите какую-нибудь неправильную дробь.  $\left(\frac{7}{5}\right)$

Почему считаешь эту дробь неправильной?

3. На сколько пятых долей названная дробь  $\frac{7}{5}$  больше единицы?

(В единице пять пятых доли:  $1 = \frac{5}{5}$ ; семь пятых больше пяти пятых на две пятых:  $\frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$ .)

4. Дана дробь  $\frac{7}{8}$ . Какая это дробь: правильная или неправильная? На сколько долей данная дробь меньше 1? (В единице восемь восьмых доли:  $\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ ; дробь  $\frac{7}{8}$  меньше единицы на  $\frac{1}{8}$ .)

Следует предлагать также упражнения на сравнение дробей посредством нахождения *избытка* над единицей или *недостатка* до единицы.

5. Какая дробь больше:  $\frac{7}{8}$  или  $\frac{8}{9}$ ? От  $\frac{7}{8}$  до 1 не хватает  $\frac{1}{8}$  ( $\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ ). От  $\frac{8}{9}$  до 1 не хватает  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$ , значит, и на оборот:  $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$ .



6. Что больше:  $\frac{9}{7}$  или  $\frac{15}{13}$ ? Обе дроби неправильные. Надо их сравнить с единицей,  $\frac{9}{7}$  больше 1 на  $\frac{2}{7}$  ( $\frac{9}{7} - \frac{7}{7} = \frac{2}{7}$ ),  $\frac{15}{13}$  больше 1 на  $\frac{2}{13}$  ( $\frac{15}{13} - \frac{13}{13} = \frac{2}{13}$ );  $\frac{2}{7} > \frac{2}{13}$ . В первом случае избыток над единицей больше, чем во втором случае; значит,  $\frac{9}{7} > \frac{15}{13}$ .

## 7. ОБРАЩЕНИЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА В НЕПРАВИЛЬНУЮ ДРОБЬ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко («Просвещение», 1969) эта тема изучается в порядке, противоречащем логике вопроса, а именно:

1. Обращение неправильной дроби в смешанное число.
2. Обращение смешанного числа в неправильную дробь.
3. Обращение целого числа в неправильную дробь.

Здесь совершенно не рассматривается случай обращения неправильных дробей, равных целому числу (например:  $\frac{3}{3} = 1$ ;  $\frac{10}{2} = 5$ ).

Кроме того, логически более оправданным является порядок, когда случай  $2 = \frac{8}{4}$  предшествует случаю  $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ ; ибо решение второго примера опирается как на промежуточное звено — на превращение целого числа в неправильную дробь.

Кроме того, замена целого и смешанного числа равной ему неправильной дробью должна считаться исходной операцией хотя бы потому, что при этом выполняются более простые действия (умножение и сложение).

Таким образом, данную тему целесообразно рассматривать как две подтемы:

а) Обращение целого числа в неправильную дробь и обратное превращение.

б) Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование.

Изучение первого вопроса выглядит так (рис. 26).

В одном круге четыре четвертых части:  $1 = \frac{4}{4}$ .

В двух таких кругах будет в 2 раза больше частей:

$$2 = \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{8}{4}.$$





$$1 = \frac{4}{4}$$



$$2 = \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{8}{4}$$

Рис. 26

Сразу же рассматривается обратная задача: сколько целых кругов можно образовать из 12 четвертых долей круга?

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3.$$

При закреплении этого материала упражнения предлагаются на взаимно обратные преобразования одновременно:

$$3 = \frac{\square}{7}; \quad \frac{15}{3} = \square; \quad \frac{\square}{5} = 4; \quad \frac{32}{4} = \square;$$

$$\frac{12}{\square} = 3; \quad 2 = \frac{\square}{10}; \quad 7 = \frac{42}{\square}.$$

Затем вводится понятие о смешанном числе как числе, состоящем из целого числа и дроби:  $2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$ .



$$1 = \frac{4}{4}$$



$$2 = \frac{4 \cdot 2}{4}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Рис. 27

Предлагаются упражнения на правильную запись смешанных чисел:

$$3 + \frac{1}{4} = \square; \quad \square + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5};$$

$$5 + \frac{\square}{\square} = 5\frac{1}{4}.$$



Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование изучаются одновременно (рис. 27).

Сразу же решается обратная задача: заменить неправильную дробь смешанным числом:  $\frac{11}{4} = ?$ .

**Решение.** В 11 четвертых по четыре содержится 2 раза. Итак, 2 целых и еще 3 в остатке; остаток 3 означает три четвертых:  $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ .

Упражнения на оба преобразования предлагаются попеременно, причем на первом этапе одна операция проверяется обратной операцией:  $\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}$ . Проверка.  $3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \frac{19}{5}$ .

Обращение целого числа в неправильную дробь и неправильной дроби в целое число полезно изобразить в виде формулы

$$x = \frac{a \cdot x}{a}.$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$   
 $\xleftarrow{\hspace{1cm}}$

Читая данную формулу слева направо, получаем правило замены целого числа равной ему неправильной дробью; читая справа налево, получаем правило замены неправильной дроби целым числом.

Аналогично обращение смешанного числа в неправильную дробь и, наоборот, неправильной дроби в смешанное число можно изобразить формулой

$$x + \frac{b}{c} = \frac{c \cdot x + b}{c}.$$

Среди упражнений целесообразно предлагать деформированные примеры:

$$\begin{aligned} \frac{18}{7} &= 2 \frac{\square}{\square}; & 4 \frac{3}{5} &= \frac{\square}{\square}; \\ 3 \frac{\square}{7} &= \frac{26}{7}; & 3 \frac{\square}{5} &= \frac{\square}{5}; \\ \frac{25}{\square} &= 8 \frac{\square}{\square}; \\ 5 \frac{\square}{\square} &= \frac{21}{\square}; & \frac{41}{\square} &= 6 \frac{\square}{6}; \\ 5 \frac{3}{5} &= 5 \frac{\square}{5}; & 8 \frac{12}{7} &= 9 \frac{\square}{7}; \\ 8 \frac{15}{10} &= 6 \frac{\square}{10}; & 5 \frac{\square}{6} &= 6 \frac{5}{6} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$



### 8. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

В предыдущем параграфе процесс размельчения долей рассматривался как процесс, обратный сокращению дроби. Тем самым была выполнена определенная подготовка к изучению приведения дробей к общему знаменателю.

В задачниках по арифметике обычно содержится много упражнений, в которых требование привести к общему знаменателю предьявляется как самоцель.

Однако с психологической точки зрения важно, чтобы операция приведения к общему знаменателю работала, т. е. была средством для следующей операции, прежде всего для сравнения дробей по величине (до изучения сложения и вычитания дробей).

Пусть требуется сравнить величину дробей  $\frac{2}{7}$  и  $\frac{3}{14}$  с помощью приведения их к общему знаменателю.

Сравниваемые дроби удобно записывать не рядом, а друг под другом. Находим для знаменателей 7 и 14 наименьшее общее кратное 14:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{4}{14}; \\ \frac{3}{14}, \end{array} \right. \quad \text{значит,} \quad \frac{4}{14} > \frac{3}{14}, \quad \frac{2}{7} > \frac{3}{14}, \quad \text{НОК}(7, 14) = 14.$$

Пусть требуется расположить в порядке возрастающей величины следующие дроби:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{3}{10}$ . Наименьшее общее кратное их знаменателей 3, 12, 10 есть число 60.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{20}{60}; \\ \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}; \\ \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{18}{60}; \end{array} \right.$$

$$\frac{25}{60} > \frac{20}{60} > \frac{18}{60},$$

$$\text{значит,} \quad \frac{5}{12} > \frac{1}{3} > \frac{3}{10}, \quad \text{НОК}(3, 12, 10) = 60.$$

Приведение к общему знаменателю обыкновенных дробей целесообразно сравнить с приведением к общему знаменателю десятичных дробей.



Последнее сводится, как мы указывали выше, лишь к приписыванию нулей:

$$\begin{aligned} 3,27 &= 3,2700; \\ 3,2769 &= 3,2769. \end{aligned}$$

## 9. ОДНОВРЕМЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ДРОБЕЙ

Существующая система изучения арифметики построена на принципе отдельного изучения взаимно обратных действий.

Проведенное нами экспериментальное обучение показало дидактическую целесообразность одновременного изучения сложения и вычитания, а впоследствии умножения и деления. При такой системе обучения учащиеся сознательно усваивают связь между этими действиями. Кроме того, достигается сравнение промежуточных операций, и соответственно этому работа ведется над парами соответствующих правил.

Эти приемы помогают изучить программный материал со значительной экономией времени при лучшем качестве усвоения знаний.

В действующей системе изучения данного материала взаимосвязанные случаи сложения и вычитания отрываются друг от друга. Так, например, между сложением дробей с общим знаменателем и вычитанием дробей с общим знаменателем проходило обычно несколько уроков.

Мы в своей практике вместо шести подтем рассматриваем всего три «спаренных» раздела:

1. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.
3. Сложение и вычитание смешанных чисел.

На доске записывается тема урока.

### Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

#### Действия над дробями

Сложение (рис. 28)

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}.$$

Вычитание

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}.$$

После решения примера на сложение решается обратный пример на вычитание (записывается рядом справа).

Вторая пара примеров решается в иной последовательности: сначала — на вычитание (записываем в правой половине страницы), потом — на сложение (слева).



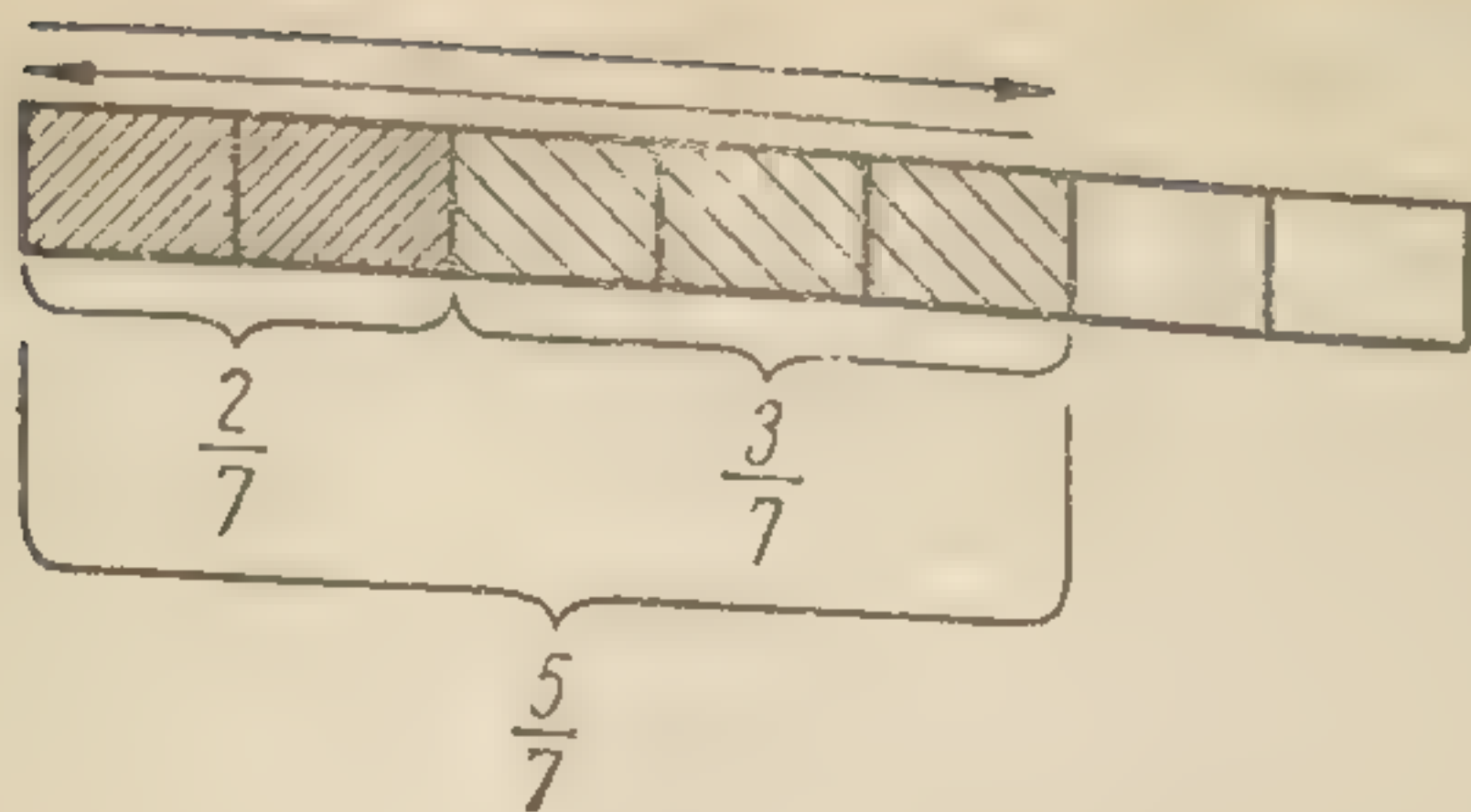


Рис. 28

$$\frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{8-2}{15} = \frac{6}{15}$$

Затем примеры решаются попеременно. Совместно с учениками формулируются правила сложения и вычитания дробей с общим знаменателем:

*Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и под этой суммой подписать тот же знаменатель.*

*Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, надо вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и под этой разностью подписать тот же знаменатель.*

Правила записываются в виде формул:

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$$

Уместно здесь показать также еще более краткую запись, т. е. двойную формулу:

$$\frac{a}{k} \pm \frac{b}{k} = \frac{a \pm b}{k}$$

На этом же уроке повторяются зависимость между компонентами (т. е. определения неизвестного компонента) и правила проверки действий первой ступени.

Пусть ученики решают пример:  $\frac{7}{11} - x = \frac{3}{11}$ .

Они рассказывают правило нахождения неизвестного вычитаемого и находят  $x$ :

$$x = \frac{7}{11} - \frac{3}{11} = \frac{7-3}{11} = \frac{4}{11}$$

Затем проверяют правильность найденного значения, подставляя его в исходное уравнение:

$$\frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{7-4}{11} = \frac{3}{11}$$



Таким образом, при этой методике наряду с выполнением действий учащиеся повторяют и правила проверки действий.

### Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сначала решается пример на сложение:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6};$$

$\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{6}$  — слагаемые,

$\frac{5}{6}$  — сумма.

Пусть теперь одно из слагаемых неизвестно:

$$\frac{2}{3} + x = \frac{5}{6}.$$

Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое:

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}.$$

Вторая пара примеров решается в иной последовательности:

Сначала решим пример на вычитание<sup>1</sup>:

$$\frac{23}{24} - \frac{5}{6} = \frac{23}{24} - \frac{20}{24} = \frac{23-20}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

<sup>1</sup> На первых порах решения примеров внимание детей бывает приковано к преобразуемым элементам записи, а постоянные элементы вообще забываются. Так, пятиклассник пишет:

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8} (?).$$

Этот недочет вызван неудачной последовательностью записей. С ней мы сопоставим психологически оправданную последовательность:

Неудачно:

$$1\text{-й этап: } \frac{5}{8} + \frac{1^2}{4} =$$

$$2\text{-й этап: } \frac{5}{8} + \frac{1^2}{4} = \frac{5}{8} + \dots$$

$$3\text{-й этап: } \frac{5}{8} + \frac{1^2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8}$$

и т. д.

Здесь сначала фиксируется дополнительный множитель.

Удачно:

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\quad}{8} + \frac{\quad}{8};$$

$$\frac{5}{8} + \frac{1^2}{4} = \frac{\quad}{8} + \frac{\quad}{8};$$

$$\frac{5}{8} + \frac{1^2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8} =$$

и т. д.

Здесь сначала фиксируется количество слагаемых и общий знаменатель.



Пусть теперь неизвестно  
уменьшаемое:

$$x - \frac{5}{6} = \frac{1}{8}.$$

Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{3 + 20}{24} = \frac{23}{24}.$$

Затем даются для решения примеры на сложение и вычитание вперемежку, причем записи постепенно сокращаются, а промежуточные преобразования выполняются в уме:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3 + 20}{24} = \frac{23}{24}, \text{ или сразу } \frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{23}{24}.$$

Отметим следующее важное обстоятельство: при одновременном изучении обоих действий ученики постигают двойную роль вспомогательного числа — дополнительного множителя (приведение к общему знаменателю) и общего делителя (сокращение дроби).

Пусть решается пример:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4 + 9}{24} = \frac{13}{24}.$$

Решим обратный пример на вычитание:

$$\frac{13}{24} - \frac{1}{6} = \frac{13 - 4}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Если при сложении дробь  $\frac{3}{8}$  была заменена более мелкими долями  $\left(\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}\right)$ , то при вычитании совершается обратная операция сокращения  $\left(\frac{9}{24} = \frac{9 : 3}{24 : 3} = \frac{3}{8}\right)$ .

Стало быть, при одновременном изучении взаимно обратных действий и промежуточные операции сопоставляются или противопоставляются (размельчение и укрупнение при сложении и вычитании дробей).

Для уяснения последовательности преобразований при сложении и вычитании дробей весьма полезно упражнение на восстановление пропущенных чисел:

$$\frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} - \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = \frac{12 - 9}{24} = \text{--- и т. п.}$$



## Сложение и вычитание смешанных чисел

Пусть требуется решить пример:

$$3\frac{1}{6} + 5\frac{3}{8} =$$

Сначала приводим дроби к общему знаменателю, а затем складываем отдельно целые части и дробные части:

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{6} + 5\frac{3}{8} &= 3\frac{4}{24} + 5\frac{9}{24} = \\ &= 8\frac{4+9}{24} = 8\frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Преобразуем решенный пример:

$$3\frac{1}{6} + 5\frac{3}{8} = 8\frac{13}{24} \text{ в уравнение}$$

так:

$$\begin{aligned} x + 5\frac{3}{8} &= 8\frac{13}{24}; \quad x = 8\frac{13}{24} - 5\frac{3}{8} = \\ &= 8\frac{13}{24} - 5\frac{9}{24} = 3\frac{13-9}{24} = 3\frac{4}{24} = 3\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Затем даем ученикам пример на вычитание:

$$9\frac{2}{3} - 5\frac{4}{5} = 9\frac{10}{15} - 5\frac{12}{15} = 4\frac{10-12}{15} = 3\frac{25-12}{15} = 3\frac{13}{15},$$

причем предлагаем проверить результат вычитания сложением:

$$3\frac{13}{15} + 5\frac{4}{5} = 8\frac{13+12}{15} = 8\frac{25}{15} = 9\frac{10}{15} = 9\frac{2}{3}.$$

Если при решении предыдущего примера пришлось раздроблять единицу в пятнадцатые доли ( $1 = \frac{15}{15}$ ), то в обратном примере была выполнена противоположная операция — замена неправильной дроби ( $\frac{15}{15}$ ) целым числом (1).

Сложение и вычитание десятичных дробей удобно связывать и сравнивать вначале с теми же действиями над именованными числами:

$$\begin{array}{r} + 3 \text{ м } 87 \text{ см} \\ 2 \text{ м } 06 \text{ см} \\ \hline 5 \text{ м } 93 \text{ см} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 3,47 \text{ м} \\ 2,06 \text{ м} \\ \hline 5,93 \text{ м} \end{array}$$

и т. д.

Пусть было выполнено сложение:

$$\begin{array}{r} 3,67 \\ + 0,548 \\ \hline 4,218 \end{array}$$

После решения примера на сложение мы сразу же рассматриваем обратный пример на вычитание:



$$\begin{array}{r} 4,218 \\ - 0,548 \\ \hline 3,67 \end{array}$$

Вторую пару примеров рассматриваем в другом порядке, т. е. первым решаем пример на вычитание, а результат проверяем сложением:

$$\begin{array}{r} 10,038 \\ - 8,37 \\ \hline 1,668 \end{array} \quad \text{Проверка.} \quad \begin{array}{r} + 1,668 \\ + 8,37 \\ \hline 10,038 \end{array}$$

Чтобы научить учащихся правильно располагать цифры при выполнении сложения и вычитания, целесообразно запись второго компонента начинать с постановки запятой под запятой:

$$\begin{array}{r} 10,038 \\ \hline \end{array}$$

Потом правее и левее запятой располагать цифры, обозначающие разряды.

Полезно иногда предлагать деформированные примеры, в которых ученик должен восстановить пропущенные цифры, например:

$$\begin{array}{r} + \square 2,35\square \\ + 7,\square 96 \\ \hline 29,649 \end{array} \quad \begin{array}{r} - \square 8,\square\square \\ - 3\square,65\square \\ \hline 59,703 \end{array}$$

Одновременное изучение сложения и вычитания десятичных дробей позволяет с первых же шагов решать простейшие уравнения, сопровождая решение проверкой:

$$x + 28,6 = 36,05.$$

$$\begin{array}{r} 36,05 \\ - 28,6 \\ \hline 7,45 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Проверка.} \\ + 7,45 \\ + 28,6 \\ \hline 36,05 \end{array}$$

При изучении сложения и вычитания необходимо систематически производить вычисления на счетах. Сложение и вычитание десятичных дробей — один из удобных разделов для тренировки вычислений на счетах.

Чаще следует решать одни и те же примеры в двух формах: в обыкновенной и десятичной дроби, ограничиваясь пока дробями с удобными знаменателями:

$$\begin{aligned} 3\frac{3}{4} + 4\frac{2}{5} &= 7\frac{15+8}{20} = 8\frac{3}{20}; \\ 3\frac{3}{4} &= 3\frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = 3\frac{75}{100} = 3,75; \\ 4\frac{2}{5} &= 4\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = 4\frac{4}{10} = 4,4; \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 3,75 \\ + 4,4 \\ \hline 8,15 \end{array} \quad 8,15 = 8 \frac{15}{100} = 8 \frac{3}{20}.$$

Ответы совпали.

Предлагаются примеры, в которых имеются обыкновенные и десятичные дроби, причем решение предпочтительно выполняется в десятичных дробях:

$$3\frac{3}{4} + 4,46 - 2\frac{19}{25} - 0,67 \text{ и т. д.}$$

#### 10. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ НА ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. УВЕЛИЧЕНИЕ И УМЕНЬШЕНИЕ ДРОБИ В НЕСКОЛЬКО РАЗ

Данный раздел является одним из центральных в арифметике дробей: здесь мы не только противопоставляем взаимно обратные операции умножения и деления дроби на целое число, но и совмещаем с ними до сих пор отдельно рассматривавшиеся вопросы: увеличение дроби в целое число раз с умножением дроби на целое число; уменьшение дроби в целое число раз с делением ее на целое число. Рассмотрим методику этого вопроса (рис. 29).

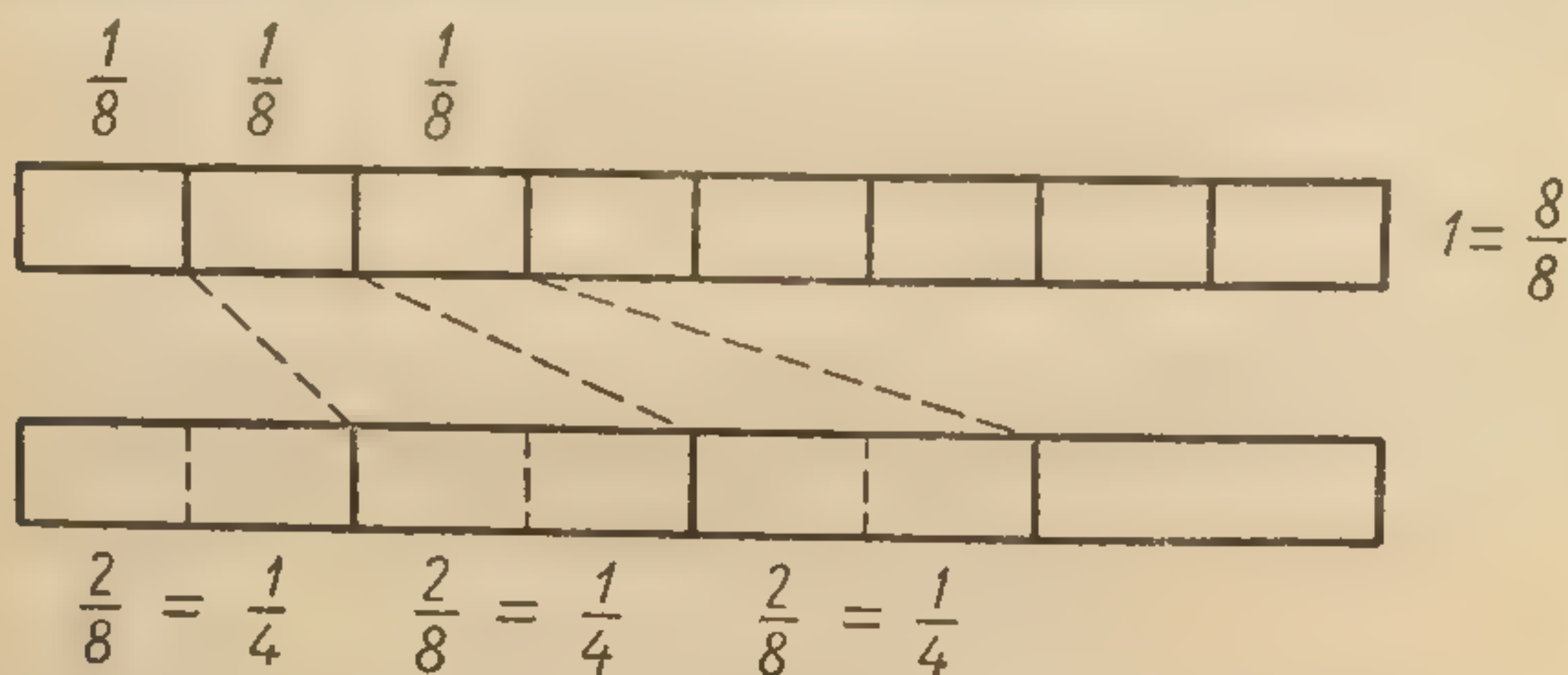


Рис. 29

Пусть требуется умножить дробь  $\frac{1}{8}$  на 2.

Умножить на 2 — это значит взять число  $\frac{1}{8}$  слагаемым два раза:

$$\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Короче это можно было записать так:

$$\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Пусть требуется разделить число  $\frac{1}{4}$  на 2.

В  $\frac{1}{4}$  содержится две восьмые доли, а две восьмые разделить на 2, получится одна восьмая:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{8}.$$

Как же получена новая дробь  $\frac{1}{8}$ ?

Был знаменатель 4, стал знаменатель 8, числитель остался



Решим еще пример:

$$\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Чтобы умножить дробь  $\left(\frac{u}{z}\right)$  на целое число ( $ц$ ), нужно умножить числитель на это число, оставив знаменатель без изменения.

Запишем правило умножения дроби на целое число в общем виде:

$$\frac{u}{z} \cdot ц = \frac{u \cdot ц}{z}.$$

После того как выведены оба правила, необходимо решить несколько парных примеров:

$$\frac{3}{17} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{17} = \frac{15}{17}.$$

Во второй паре сначала предлагается пример на деление, который потом проверяется умножением.

Затем решаются примеры на обе операции попеременно, причем лишь некоторые из них преобразуются в обратные.

Важно на первых же уроках наряду с прямыми примерами предложить ученикам решить деформированные примеры вида:

$$\frac{7}{10} : \square = \frac{7}{30}; \quad \frac{7}{9} : 4 = \frac{1}{36};$$

без изменения. Иначе говоря, мы выполнили следующее преобразование:

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}.$$

Пусть теперь требуется определить множимое по произведению  $\left(\frac{3}{4}\right)$  и множителю (2), т. е.

требуется решить обратную задачу:  $\frac{3}{4} : 2$ . Так как деление

есть действие, обратное умножению, то мы имеем право писать сразу результат деления:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{\square}{\square} = \frac{3}{8}.$$

Здесь числитель в делимом и частном один и тот же, а знаменатель в частном увеличился в 2 раза:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}.$$

Чтобы разделить дробь  $\left(\frac{3}{4}\right)$  на целое число ( $ц$ ), нужно умножить знаменатель дроби на это число, оставив числитель без изменения.

Правило деления дроби на целое число запишется так:

$$\frac{u}{z} : ц = \frac{u}{z \cdot ц}.$$

$$\frac{15}{17} : 5 = \frac{15}{17 \cdot 5} = \frac{3}{17}.$$



$$\begin{array}{l} \frac{8}{\square} : 5 = \frac{8}{15}; \\ \frac{\square}{9} \cdot 4 = \frac{8}{9}; \\ \frac{\square}{\square} \cdot 5 = \frac{10}{21}; \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{7}{30} \cdot \square = \frac{21}{30}; \\ \frac{\square}{\square} : 7 = \frac{1}{21}; \\ \frac{3}{\square} \cdot 2 = \frac{6}{35}. \end{array}$$

В существующих учебниках арифметики и методических пособиях обычно даются два способа умножения и деления дробей.

Например, в учебнике арифметики И. Н. Шевченко дано следующее правило: «Чтобы умножить дробь на целое число, нужно умножить на это целое число числитель и оставить тот же знаменатель или, если возможно, разделить на это число знаменатель, оставив без изменения числитель» (подчеркнуто мною. — П. Э.).

Эти два способа логически неравноценны, ибо первый способ можно применить всегда, а второй лишь в отдельных случаях. Поэтому второй прием нецелесообразно возводить в ранг правил.

После того как будут усвоены действия умножения и деления дроби на целое число, вводится понятие увеличения (уменьшения) дроби в 3, 5, 8, ... (целое число) раз как синонимов понятий умножения (деления) дроби на эти же целые числа и только.

Рациональным оказывается следующее: два новых правила увеличения и уменьшения числа в целое число раз должны слиться в мышлении соответственно с правилами умножения и деления дроби на целое число.

Приведем это правило.

Чтобы  $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$  дробь в несколько раз, надо увеличить во столько же раз  $\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$ , оставив постоянным другой член дроби.

И вот эффект экономии: вместо 8 правил по действующей системе конечным результатом изучения данной темы по предлагаемой системе оказывается запоминание в сущности только двух правил.

Последние два правила можно сформулировать иначе, как перефразировки (обращение) предыдущих правил:

Если при постоянном знаменателе числитель дроби увеличить в несколько раз, то величина дроби увеличится во столько же раз.

Если при постоянном числителе знаменатель дроби увеличить в несколько раз, то величина дроби уменьшится во столько же раз.

Для усвоения данного материала ценна, как и вообще в математике, не тренировка ученика в одностороннем применении заученных правил, а максимальная вариация форм вопросов, ответы на которые требуют каждый раз иного осмысливания знаний.

1. Выполнено действие:  $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$ .



Прочитать данную зависимость, используя слова: *увеличить, меньше, больше*.

О т в е т. а)  $\frac{4}{9}$  увеличить в 2 раза — получится  $\frac{8}{9}$ ;

б)  $\frac{4}{9}$  меньше  $\frac{8}{9}$  в 2 раза;

в)  $\frac{8}{9}$  больше  $\frac{4}{9}$  в 2 раза.

2. Как уменьшить (увеличить) дробь в 4 раза? Придумай пример.

3. Была дробь  $\frac{2}{7}$ . После изменения она стала равной  $\frac{6}{7}$ .

Увеличилась или уменьшилась дробь? Во сколько раз? Записать это изменение  $(\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7})$ .

4. Как следует изменить дробь  $\frac{3}{7}$ , чтобы получилась дробь  $\frac{3}{28}$ ?

5. Увеличить дробь  $\frac{2}{9}$  в 4 раза. Ответ проверить делением.

6. Уменьшить дробь  $\frac{6}{17}$  в 3 раза. Ответ проверить умножением.

7. Некоторую дробь увеличили в 4 раза и получили дробь  $\frac{8}{15}$ .

Какова была первоначальная дробь?  $(\frac{\square}{\square} \cdot 4 = \frac{8}{15})$

8. Дробь  $\frac{8}{9}$  больше дроби  $\frac{4}{9}$  в 2 раза. Записать данную зависимость двумя способами.

(Р е ш е н и е.  $\frac{8}{9} : 2 = \frac{4}{9}$ ;  $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$ .)

# 11. УВЕЛИЧЕНИЕ И УМЕНЬШЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ В 10, 100, 1000, ... и т. д. РАЗ. (УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА 10, 100, ... и т. д.)

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко, как и в других пособиях, вопрос об увеличении и уменьшении десятичной дроби в 10, 100, 1000, ... и т. д. раз рассматривается до изучения действий с десятичными дробями.

Однако, как и в случае обыкновенных дробей, оказывается целесообразным совмещение умножения (деления) десятичной дроби на 10, 100, ... соответственно с увеличением (уменьшением) дроби в 10, 100, ... и т. д. раз.

В книге Н. Н. Саговской умножение десятичной дроби на 10, 100, ... и т. д. рассматривается на одном уроке и деление десятичной дроби на 10, 100, ... и т. д. рассматривается на другом уроке.

Опытная проверка показала исключительную эффективность одновременного изучения данных разделов программы. При этом



учащиеся хорошо усваивают связь между умножением и делением, а учебное время используется более экономно, чем при раздельном изучении материала.

Пусть имеется число 26,45. Увеличим его в 10 раз. Тогда 2 десятка станут 2 сотнями, 6 единиц — 6 десятками, 4 десятых доли станут 4 единицами, 5 сотых доли — 5 десятыми.

Запишем это преобразование:

$$26,45 \cdot 10 = 264,5.$$

Для того чтобы десятичную дробь увеличить в 10 раз (умножить на 10), надо запятую перенести вправо на один знак.

Рассмотрим обратную задачу — уменьшить число 264,5 в 10 раз:

$$264,5 : 10 = 26,45.$$

Для того чтобы десятичную дробь уменьшить в 10 раз (разделить на 10), надо запятую перенести влево на один знак.

Пусть требуется увеличить число 3,765 в 100 раз. Для того чтобы увеличить число в 100 раз, надо увеличить его сначала в 10 раз, а потом опять в 10 раз, т. е. запятую надо перенести на два знака вправо:

$$3,765 \cdot 100 = 376,5.$$

Очевидно, верно и следующее:

$$376,5 : 100 = 3,765.$$

Таким образом, мы приходим к следующему объединенному правилу:

Для того чтобы  $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$  десятичную дробь в 10, 100, 1000, ... и т.д. раз, надо перенести запятую соответственно на 1, 2, 3, ... и т.д. знаков  $\frac{\text{вправо}}{\text{влево}}$ .

Решение второй пары примеров надо начать с деления и проверить умножением.

Упражнения по этой теме должны состоять как из обычных, так и обратных им, т. е. на восстановление деформированной записи:

$$3,76 \cdot 10 = \square;$$

$$25,7 \cdot 10 = \square;$$

$$123,45 : \square = 12,345;$$

$$\square \cdot 1000 = 8,36;$$

$$\square : 100 = 2,68;$$

$$3,06 \cdot \square = 3060;$$

$$0,073 ? \square = 7,3 \text{ (два ответа).}$$

Понятиями *увеличить* (*уменьшить*) в 10, 100, ... раз и *умножить* (*разделить*) на 10, 100, ... надо пользоваться при решении этих примеров как синонимами.

При изучении этого материала уместно повторить соотношения



между десятичными мерами посредством выполнения следующих упражнений:

$$3,78 \text{ м} = ? \text{ см};$$

$$? \text{ м} = 63 \text{ дм};$$

$$5 \text{ кг} : 1000 = ? \text{ кг};$$

$$7,2 \text{ ц} : 100 = ? \text{ кг};$$

$$87 \text{ руб.} : ? = 87 \text{ коп.};$$

$$? \cdot 100 = 13 \text{ ц.}$$

$$37,9 \text{ мм} = ? \text{ см};$$

$$876,4 \text{ дм}^2 = ? \text{ см}^2;$$

$$? \text{ м}^3 : 1000 = 5 \text{ дм}^3;$$

$$? \text{ коп.} \cdot 100 = 36 \text{ руб.};$$

$$7 \text{ ц} : ? = 7 \text{ т};$$

$$7 \text{ ц} : ? = 7 \text{ кг.}$$

Рассматриваемые правила имеют силу и для целых чисел, являющихся частным случаем десятичных дробей:

$$\begin{aligned} 63 : 1000 &= \\ = 000063,0000 : 1000 &= \\ = 0,063. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 63 \cdot 1000 &= \\ = 0063,0000 \cdot 1000 &= \\ = 6300,0. \end{aligned}$$

## 12. ОДНОВРЕМЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ ДРОБЕЙ

В действующих программах и учебниках сначала вводилась задача на нахождение части числа и на его основе задача умножения дроби на дробь; затем через некоторое время вводилась задача на нахождение числа по его части и опять на других уроках — деление дробных чисел.

В пробных учебниках для IV класса, изданных в 1968 г., изучение этих вопросов разворачивается тоже раздельно, но в разных вариантах.

Общее в этих вариантах — то, что сначала вводится умножение дробных чисел постулированием: произведением двух дробей

$$\frac{a_1}{b_1} \text{ и } \frac{a_2}{b_2} \text{ называется дробь } \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}.$$

При работе по новым программам было бы более целесообразным придерживаться иного пути: сначала рассматривать пару операций *умножение и деление дроби на дробь*, а затем на их основе как частные случаи — другую пару — *нахождение части числа и числа по его части*.

Таким образом, мы здесь добиваемся не только уменьшения числа запоминаемых правил, но и используем в полной мере преимущества совмещенного изучения прямых и обратных задач.

В излагаемой методике сначала вводится действие умножения дробей на основе геометрических соображений, а именно исходят из того, что *площадь прямоугольника находится перемножением длины и ширины и в том случае, когда последние выражены дробными числами*.

Таким образом, при этой методике действие умножения дробей как бы постулируется, но подкрепляется немедленной геометрической иллюстрацией.

Деление дробных чисел вводится в противопоставлении с прямым действием как действие, обратное умножению дробных чисел.

Затем рассматривается совместно нахождение части от числа



и числа по его части, как обычно, причем выясняется, что первая задача сводится к умножению дробей, вторая — к делению дробей.

Можно сказать так: что бы ни изучалось, каким бы логическим путем мы ни шли при этом, метод противопоставления всегда облегчает, ускоряет процесс обучения.

Кратко опишем указанный второй подход к методике изучения действий второй ступени над дробными числами.

Пусть требуется найти площадь прямоугольника со сторонами 3 и 5 см.

Решение.

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ (см}^2\text{)};$$

ширина  $\cdot$  длина = площадь.

Решаем обратную задачу: Площадь прямоугольника  $15 \text{ см}^2$ , его ширина 3 см. Найти высоту прямоугольника.

Решение.

$$15 : 3 = \frac{15}{3} = 5 \text{ (см),}$$

$$\frac{\text{площадь}}{\text{ширина}} = \text{длина.}$$

Рассматриваем далее другую пару задач.

Задача. Дан квадратный дециметр, стороны которого равны 1 дм, или 10 см. (Его площадь  $1 \text{ дм} \cdot 1 \text{ дм} = 1 \text{ дм}^2$ , или  $10 \text{ см} \cdot 10 \text{ см} = 100 \text{ см}^2$ .)

От него отрезан прямоугольник, длина которого составляет  $\frac{7}{10}$  дм, а ширина  $\frac{3}{5}$  дм. Определить площадь этого прямоугольника (рис. 30).

Задачу решаем тремя способами.

1-й способ. Вычисляем площадь заштрихованного прямоугольника в квадратных сантиметрах.

Для этого длину и ширину надо выразить в одних единицах — сантиметрах.

Длина прямоугольника  $\frac{7}{10}$  дм, или 7 см.

Ширина прямоугольника  $\frac{3}{5}$  дм, или  $\frac{6}{10}$  дм, или 6 см.

Площадь прямоугольника  $7 \cdot 6 = 42 \text{ (см}^2\text{)}$ .

2-й способ. Решаем задачу на основе «здравого смысла» следующим рассуждением:

Разделим квадратный дециметр на 10 равных вертикальных полос и 5 равных горизонтальных полос.

Вся площадь квадратного дециметра разбита на  $10 \cdot 5 = 50$  равных частей — 50 частичных прямоугольников.

Площадь одного частичного прямоугольника составляет  $\frac{1}{50}$  часть квадратного дециметра  $\left( \frac{1}{50} \text{ дм}^2 \right)$  или  $\frac{1}{50}$  от  $100 \text{ см}^2 = 100 : 50 = 2 \text{ (см}^2\text{)}$ .



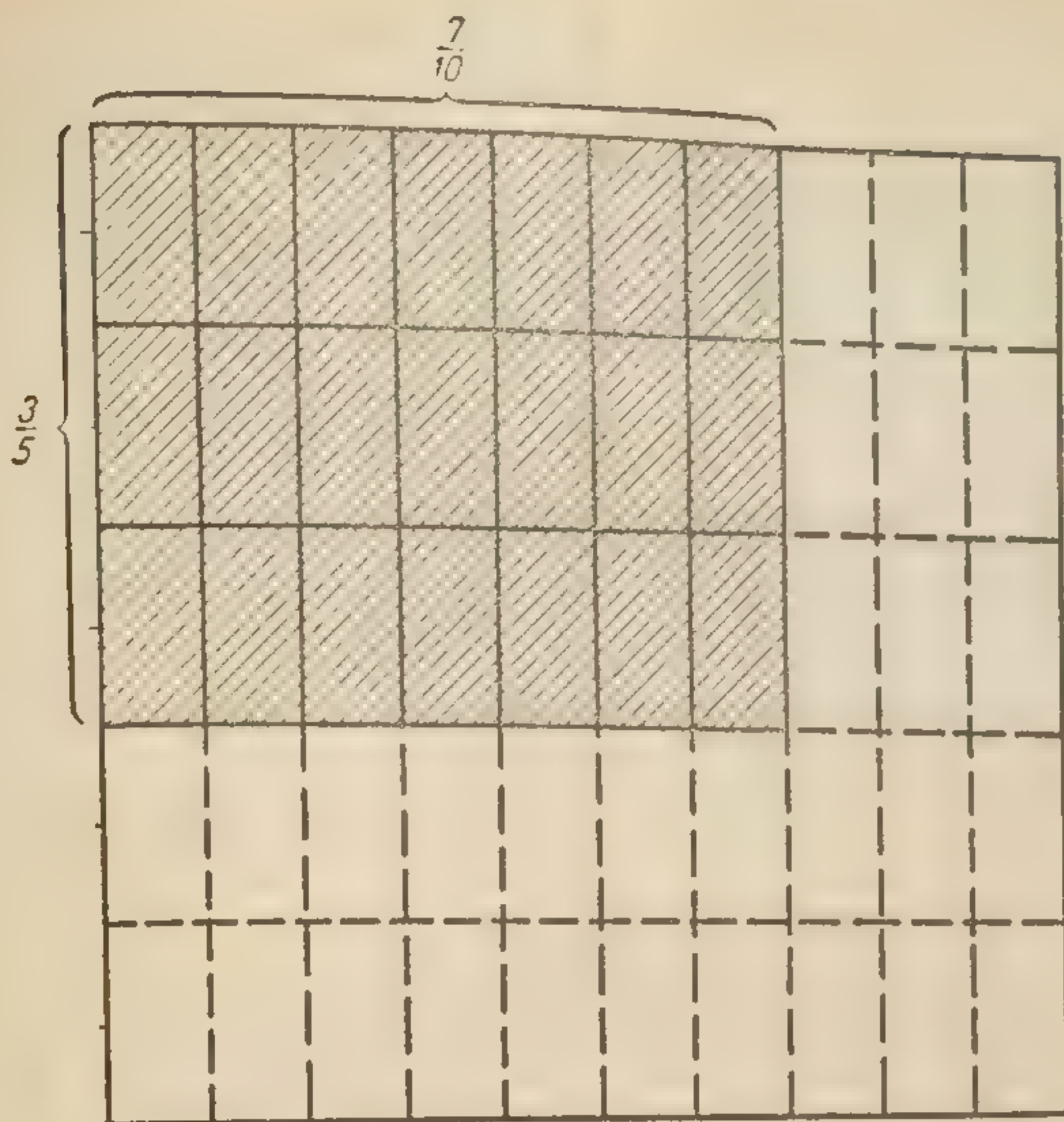


Рис. 30

В заштрихованном прямоугольнике содержится  $3 \cdot 7 = 21$  частичный прямоугольник, или его площадь составляет  $\frac{21}{50} \text{ дм}^2$  или  $\frac{21}{50}$  от  $100 \text{ см}^2 = 42 \text{ см}^2$ . (Такие задачи учащиеся решали по разделу целых чисел в начальной школе.)

Этот ответ совпадает с ответом, полученным при первом способе решения.

3-й способ (основной).

Площадь любого прямоугольника находится умножением ширины на длину:  $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} \dots =$

В произведении должно быть получено число  $\frac{21}{50} (\text{дм}^2)$ .

(Это следует из решения предыдущим способом.)

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{?}{?} = \frac{21}{50}$$

Вопрос заключается в том, чтобы найти правило, как получить это произведение.

Легко видеть, что указанное произведение находится следующим образом:



$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{21}{50} \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Ответ совпадает с ранее найденным.

Формулируем правило:

Чтобы перемножить дроби, достаточно перемножить числители и знаменатели и первое произведение взять числителем, а второе — знаменателем:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}.$$

На этом же уроке решаем обратную задачу:

Площадь прямоугольника равна  $\frac{21}{50}$  дм<sup>2</sup>, его длина  $\frac{7}{10}$  дм.

Найти ширину прямоугольника.

Решение. Чтобы найти ширину прямоугольника, надо площадь прямоугольника разделить на его длину:

$$\frac{21}{50} : \frac{7}{10} = \dots =$$

$$\frac{21}{50} : \frac{7}{10} = \dots = \frac{3}{5}.$$

В предыдущей задаче  $\frac{3}{5}$  было первым сомножителем (ширина),  $\frac{7}{10}$  — вторым сомножителем (длина), а  $\frac{21}{50}$  — произведение.

Деление — это действие, обратное умножению.

Если произведение разделить на один сомножитель  $\left(\frac{7}{10}\right)$ , то в ответе должен получиться второй сомножитель  $\left(\frac{3}{5}\right)$ .

Итак, мы здесь пользуемся определением деления.

Стало быть, рассуждение логично: оно не имеет изъянов.

Запись приобретает вид:<sup>1</sup>

$$\frac{21}{50} : \frac{7}{10} = \dots = \frac{3}{5}.$$

Вопрос заключается в том, чтобы найти правило деления дроби на дробь, которое таково:

$$\frac{21}{50} : \frac{7}{10} = \frac{21}{50} \cdot \frac{10}{7} = \frac{21 \cdot 10}{50 \cdot 7} = \frac{3}{5}.$$

Получим ожидаемое число.

П р а в и л о. Чтобы разделить дробь на дробь, достаточно множимое умножить на число, обратное множителю:

<sup>1</sup> Можно также сослаться на обратную задачу на нахождение площади: если площадь прямоугольника разделить на его длину, то получим ширину прямоугольника.



$$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{ay}{bx}$$

Далее решаются примеры на оба действия в плане противопоставления, а именно: если пример дан на умножение, то его ответ проверяется делением; если же сначала решен пример на деление, то его ответ проверяется умножением.

### 13. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОГО И СМЕШАННОГО ЧИСЕЛ НА ДРОБЬ КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ ДРОБИ НА ДРОБЬ

Учащиеся еще из курса начальной школы знают, что при делении числа на единицу в частном получается то же самое число. Поэтому для них законны и понятны записи:  $7 = \frac{7}{1}$ ;  $12 = \frac{12}{1}$  и т. д.

Пусть требуется выполнить умножение целого числа 15 на  $\frac{2}{3}$ ; решаем так:

$$15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{15}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15^5 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{10}{1} = 10.$$

Разумеется, впоследствии промежуточные операции свертываются, и запись приобретает вид:

$$15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{15 \cdot 2}{3} = \text{и т. д.}$$

Рассмотрим обратную задачу:

$$10 : \frac{2}{3} = \frac{10}{1} : \frac{2}{3} = \frac{10^5 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{15}{1} = 15.$$

Затем можно перейти к кратким формам записи:

$$10 : \frac{2}{3} = \frac{10 \cdot 3}{2} = \frac{15}{1} = 15.$$

Если первая пара примеров была решена в порядке: умножение — деление, то вторую пару примеров надо предложить в порядке: деление — умножение.

$$12 : \frac{3}{4} = \frac{12}{1} : \frac{3}{4} = \text{и т. д.}$$

Затем результат деления проверяется умножением:  $16 \cdot \frac{3}{4}$ .



Умножение и деление смешанных чисел на дробь рассматриваем также совместно:

$$3\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{33}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3\cancel{3}^{11} \cdot \cancel{5}^1}{10_2 \cdot 6_2} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Умножение проверяем делением:

$$2\frac{3}{4} : 3\frac{3}{10} = \frac{11}{4} : \frac{33}{10} = \frac{11^1 \cdot 10^5}{4_2 \cdot 3\cancel{3}_3} = \frac{5}{6}.$$

Вторую пару примеров решаем в другой последовательности: сначала решаем пример на деление:  $9\frac{1}{15} : 3\frac{2}{5}$  и ответ проверяем умножением:  $3\frac{2}{5} \cdot 2\frac{2}{3}$ .

Особые правила умножения и деления смешанных и целых чисел на дробь не заучиваются.

Достаточно, если ученики смогут своими словами передать следующее:

*Чтобы умножить или разделить смешанные (целые) числа на дробь, нужно их представить в виде дроби и дальше выполнять действия по правилам умножения или деления дроби на дробь.*

Уместно обратить внимание учащихся на то, что умножение и деление целых чисел тоже возможно представить как частные случаи соответствующих действий над дробными числами:

$$6 \cdot 8 = \frac{6}{1} \cdot \frac{8}{1} = \frac{6 \cdot 8}{1 \cdot 1} = \frac{48}{1} = 48;$$

$$6 : 8 = \frac{6}{1} : \frac{8}{1} = \frac{6 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

#### 14. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Надо начать с того, что целое число является частным случаем десятичной дроби (десятичная дробь без долей):

$$47 = 47,0;$$

$$47 = 47,00 \text{ и т. д.}$$

Стало быть, нет нужды отдельно рассматривать умножение десятичной дроби на целое число, а следует сразу вывести общее правило умножения десятичной дроби на десятичную, которое вер-



но и для частного случая, когда один или оба сомножителя — целые числа.

Пусть требуется выполнить умножение:  $0,37 \cdot 0,4 =$   
Выполним умножение в форме обыкновенных дробей:

$$0,37 = \frac{37}{100}; \quad 0,4 = \frac{4}{10};$$

$$0,37 \cdot 0,4 = \frac{37 \cdot 4}{100 \cdot 10} = \frac{148}{1000} = 0,148.$$

Чтобы найти числитель произведения, мы перемножили дроби, не обращая внимания на запятые, как целые числа ( $37 \cdot 4 = 148$ ).

Знаменатель первого сомножителя — 100, знаменатель второго сомножителя — 10, а знаменатель произведения — 1000.

Говоря по-другому: если в первом сомножителе были отделены запятой справа две цифры (знаменатель 100 имеет два нуля) и во втором — одна цифра (знаменатель 10 имеет один ноль), то в произведении отделены справа три цифры (в тысяче три нуля).

Для уяснения правила постановки запятой в произведении при умножении десятичных дробей целесообразно предлагать для устного решения примеры с несложными числами, например:

$$0,22 \cdot 0,02 = 0,0044;$$

$$30 \cdot 2,3 = 69;$$

$$4,231 \cdot 200 = 846,2;$$

$$31,2 \cdot 0,02 = 0,624 \text{ и т. д.}$$

Умножение десятичной дроби на целое число (или наоборот) подводится под общее правило:

$$0,37 \cdot 4 = 1,48.$$

В одном сомножителе запятой справа отделены две цифры (0,37), а в другом сомножителе ни одна цифра не отделена запятой (отделены нуль цифр), поэтому в произведении мы отделяем запятой лишь две цифры ( $2 + 0 = 2$ ).

Если в случае умножения можно было сразу вывести правило для общего случая — умножения десятичной дроби на десятичную дробь, то в случае деления необходимо сначала рассмотреть деление дроби на целое число, а затем изучать общий случай деления дроби на дробь.

Это следует из того, что деление десятичной дроби на дробь сводится к делению десятичной дроби на целое число.

Пусть требуется выполнить действие:

$$\begin{array}{r} 0,0168 \overline{) 3} \\ \underline{15} \phantom{0,0056} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$



Рассуждаем так: 0 целых разделить на 3, получится 0 *целых*; 0 десятых разделить на 3, получится 0 *десятых*; 1 сотую разделить на 3 невозможно, записываем 0 *сотых*; 16 тысячных разделить на 3, получится 5 *тысячных*, а в остатке 1 *тысячная*; сносим 8 *десятитысячных*; 18 *десятитысячных* при делении на 3 дадут 6 *десятитысячных*, т. е. получим ответ 0,0056.

Таким образом, деление десятичной дроби на целое число выполняется *п о р я д н о*, так же как и деление целого числа на целое.

Деление десятичной дроби на десятичную дробь сводится к предыдущему случаю.

Вывод правила деления десятичной дроби на десятичную дробь может быть осуществлен так:

Сначала вспоминаем основное свойство частного: если делимое и делитель — целые числа и они умножены на одно и то же число, то частное не изменяется:  $24 : 12 = 2$ ;

$$(24 \cdot 100) : (12 \cdot 100) = 2400 : 1200 = 2.$$

Убеждаемся, что это верно и для дробей.

Пусть найдено частное от деления двух дробей:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$$

Увеличим каждую дробь в несколько раз, например в 10 раз:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot 10\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot 10\right) = \frac{3 \cdot 10}{4} : \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{30}{4} : \frac{20}{5} = \frac{30 \cdot 5}{4 \cdot 20} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$$

Частное осталось прежним.

Пусть требуется вычислить:

$$0,256 : 1,6 =$$

Так как компоненты этого действия — дроби, то их можно увеличить в одно и то же число раз и от этого частное не изменится.

Так как разделить десятичную дробь на *целое число* ученики умеют, то наша цель — превратить делитель в целое число; в делителе 1,6 содержатся *десятые доли*; значит, чтобы свести деление дробей к делению дроби на целое число, оба компонента — делимое и делитель — надо умножить на 10; имеем:

$$0,256 : 1,6 = (0,256 \cdot 10) : (1,6 \cdot 10) = 2,56 : 16;$$

$$\begin{array}{r} 2,56 \overline{) 16} \\ \underline{16} \phantom{00} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

Удобно располагать запись деления так, чтобы новый пример находился под прежним примером, а не рядом с ним; в этом случае расположение одних и тех же цифр друг под другом облегчает подсчет знаков, через которые переносится запятая:

формулируем  
целые и десятичные дроби на  
В этом прави  
десятичной дроб

С интересом  
ые примеры:

$$\begin{array}{l} 18 : 0,001 = \\ \square : 0,01 = \\ 3,89 : 0,1 = \\ 15,6 : \square = \\ \square : 1,000 = \\ 0,87 : 100 = \end{array}$$

#### 15. НАХОЖ

В традицион  
части числа ра  
ной части — в  
в III классе, с  
нескольких его  
Эксперимен  
зал, что первы  
изучения во I  
При таком  
значительно с  
в V классе.  
В этом слу  
се стало бы в  
хождение час  
Задачи на  
ти являются  
мых во II кл  
выгодно испо

1 Подробне  
взаимно обратн  
ной школы.



$$3,672 : 2,04 =$$

$$367,2 : 204 =$$

Формулируем правило:

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо делимое и делитель увеличить во столько раз, чтобы делитель обратился в целое число. Дальше выполнять деление по правилам деления дроби на целое число.

В этом правиле целое число понимается как частный случай десятичной дроби, например:

$$3672,000 : 2,04 =$$

$$367200,0 : 204 =$$

С интересом решают ученики устно следующие деформированные примеры:

$$18 \cdot 0,001 =$$

$$\square \cdot 0,01 = 13,7;$$

$$3,89 : 0,1 =$$

$$15,6 : \square = 1560;$$

$$\square \cdot 1000 = 37,5;$$

$$0,87? : 100 = 0,0087.$$

$$\square \cdot 0,0001 = 0,25;$$

$$13,6 \cdot \square = 1,36;$$

$$\square : 0,01 = 93,056;$$

$$\square \cdot 100 = 2,3;$$

$$37,6 : \square = 3,76;$$

$$0,87? : 100 = 87.$$

#### 15. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ОТ ЧИСЛА И ВСЕГО ЧИСЛА ПО ЕГО ЧАСТИ В РАЗДЕЛЕ «НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА»

В традиционной системе обучения задача на нахождение одной части числа рассматривалась во II классе, числа по величине одной части — в IV классе, нахождение нескольких частей числа — в III классе, обратная задача по определению чисел по величине нескольких его частей лишь в V классе.

Эксперимент, осуществленный нами в начальных классах, показал, что первые две задачи вполне доступны для одновременного изучения во II классе, а две другие — в III классе<sup>1</sup>.

При таком раннем ознакомлении учеников с этими задачами значительно облегчается изучение умножения и деления дробей в V классе.

В этом случае уже при изучении натуральных чисел в V классе стало бы возможным повторять взаимно обратные задачи на нахождение части числа и числа по величине его части.

Задачи на нахождение части числа и числа по величине его части являются обобщением задач на приведение к единице, изучаемых во II классе. Как в тех, так и в других вполне оправданно и выгодно использование следующих приемов:

<sup>1</sup> Подробнее об этом сказано в наших книгах [58, 59]. Сближение указанных взаимно обратных задач частично осуществлено в новых программах для начальной школы.



1. Схематической записи условия задачи в две строчки, облегчающей первоначальный анализ условия задачи (этап соотнесения данных).

Большинство ошибок учеников, обучаемых по общепринятой системе раздельного рассмотрения взаимно обратных вопросов, возникает именно из-за неумения найти связь между числами, неумения найти зависимость между числовыми данными; этим и объясняются распространенные ошибки подмены одного действия другим (вместо умножения делят или наоборот и т. п.).

2. Одновременного изучения двух взаимно обратных задач, имеющих один и тот же сюжет и числовые данные, на основе противопоставления.

Рассмотрим задачу:

На сберкнижке было 100 руб.  $\frac{2}{5}$  вклада взяли для покупки пальто. Сколько денег взяли?

Обычная методика объяснения решения этой задачи оперирует тремя числами: двумя данными (100 руб.,  $\frac{2}{5}$ ) и одним искомым (40 руб.).

Между тем важно акцентировать внимание учащихся на четырех числах, попарно соотносящихся друг с другом.

Именно такое развертывание логических операций облегчает усвоение алгоритма решения этих задач.

Сначала записываем слева друг под другом два числа:

1 составляет ... ☐

$\frac{2}{5}$  составляют ... ☐

Учитель. Какое число надо принять за условную единицу? Чему был равен весь вклад?

Учащийся. За условную единицу принимаем 100 руб. и поэтому это число пишем против 1, читаем: «1 целое составляет 100 руб.».

Учитель. Сколько же рублей составляют  $\frac{2}{5}$  части всего вклада?

Ученик. Нам это неизвестно, мы должны найти его.

Появляется запись:

1 составляет 100 руб.

$\frac{2}{5}$  составляют ☐.

Учитель. Прежде чем найти  $\frac{2}{5}$  числа, надо найти  $\frac{1}{5}$  числа.

Как же найти  $\frac{1}{5}$  числа?

Ученик. Надо 100 руб. разделить на 5.



Важно в этом месте провести анализ глубже, выяснить, почему надо делить именно на 5.

Учитель. Почему мы делим число 100 на 5, а не на какое-нибудь другое число? Сколько пятых частей содержится в одном целом? Сколько пятых долей в 100 руб.?

Ученик. В одном целом пять пятых части. Запись на доске приобретает следующий вид:

$$1 = \frac{5}{5} \text{ составляют } 100 \text{ руб.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ составляют } \square.$$

Учитель. Прочитайте условие без знаменателя.

Ученик. Пять частей составляют 100 руб., 2 части составляют ... неизвестно сколько.

Учитель. Как же найти, чему равны две пятых части? Что сначала надо найти?

Ученик. Сначала надо найти  $\frac{1}{5}$  часть; 100 руб. разделить на 5, получится 20 руб.;  $\frac{1}{5}$  часть вклада составляет 20 руб.

Запись на доске приобретает вид:

$$1 = \frac{5}{5} \text{ составляют } 100 \text{ руб.};$$

$$\frac{2}{5} \text{ составляют } \square \text{ руб.};$$

$$\frac{1}{5} \text{ составляет } 20 \text{ руб.}$$

Учитель, закрыв первую строчку, заставляет прочитать две последние строчки.

Учитель. Во сколько раз  $\frac{2}{5}$  больше  $\frac{1}{5}$  части? Как узнать, сколько составляют  $\frac{2}{5}$  части, если  $\frac{1}{5}$  составляет 20 руб.?

Ученик. Надо увеличить 20 руб. в 2 раза, получится 40 руб. Две пятых вклада равны 40 руб.

После решения прямой задачи ее тут же перестраиваем в обратную задачу при тех же числовых данных и том же сюжете.

Учитель. В прямой задаче мы знали весь вклад (100 руб.), а надо было найти  $\frac{2}{5}$  всего вклада (40 руб.). А теперь поступим наоборот: пусть известны 40 руб., а надо найти 100 руб.

На доске рядом со схемой прямой задачи появляется схема обратной задачи (третья строчка стирается, стирается также дробь  $\frac{5}{5}$ ).



Прямая задача.  
1 составляет 100 руб.  
 $\frac{2}{5}$  составляет  $\square$  руб.

Обратная задача.  
1 составляет \_\_\_\_\_ руб.  
 $\frac{2}{5}$  составляет 40 руб.

Ученики читают по схеме условие обратной задачи:

На сберкнижке было несколько рублей. Известно, что  $\frac{2}{5}$  этого числа составляют 40 руб. Найти весь вклад.

Учитель.  $\frac{2}{5}$  вклада известны. А сколько пятых частей составляет весь вклад?

Ученик. Весь вклад составляет  $\frac{5}{5}$  части.

Учитель. Как же определить весь вклад, т. е. как определить 5 частей, если известны 2 части ( $\frac{2}{5}$  части)?

Ученик. Сначала надо найти одну часть: 40 руб. разделить на 2, получится 20.

$\frac{1}{5}$  часть составляет 20 руб.

Учитель дописывает схему, и она приобретает вид:

$1 = \frac{5}{5}$  составляют  $\square$ .

$\frac{2}{5}$  составляют 40 руб.

$\frac{1}{5}$  составляет 20 руб.

Учитель. Кто скажет, как теперь определить весь вклад? Во сколько раз  $\frac{5}{5}$  больше  $\frac{1}{5}$ ? Во сколько раз 5 частей больше одной части?

Ученик.  $\frac{5}{5}$  больше  $\frac{1}{5}$  в 5 раз.

20 руб. увеличить в 5 раз, получится 100 руб.

Весь вклад составляет 100 руб.

Условия двух задач и их решения записываются в тетрадях:

Нахождение части от всего числа.

$1 = \frac{5}{5}$  — 100 руб.

$\frac{2}{5}$  —  $\square$  руб.

$\frac{1}{5}$  — 20 руб.

Нахождение всего числа по его части.

$1 = \frac{5}{5}$  —  $\square$  руб.

$\frac{2}{5}$  — 40 руб.

$\frac{1}{5}$  — 20 руб.

Решение  
1. Чему рав  
да?  
 $100 : 5 = 20$   
2. Чему рав  
 $20 \cdot 2 = 40$   
После ре  
Этот завер  
лее важным  
ученики пости  
раций, усваи  
задач.  
Учитель  
Учени  
рой задаче —  
Учитель  
ниях этих  
Учени  
ствие — деле  
Учитель  
Учени  
Учитель  
задача?  
Учени  
Учитель  
водим к еди  
Как пока  
задач, опор  
В метод  
разделе.  
Так, в кни  
по части».   
Более цел  
ти часть от все  
в связи с введ  
Поэтому  
В учебни  
величины др  
вание «нахо  
лись еще в на  
этот стереот  
5 Заказ 542



Решение.

1. Чему равна  $\frac{1}{5}$  часть вклада?  
 $100 : 5 = 20$  (руб.).

2. Чему равны  $\frac{2}{5}$  части вклада?  
 $20 \cdot 2 = 40$  (руб.).

Решение.

1. Чему равна  $\frac{1}{5}$  часть вклада?  
 $40 : 2 = 20$  (руб.).

2. Чему равны  $\frac{5}{5}$  части вклада (весь вклад)?  
 $20 \cdot 5 = 100$  (руб.)<sup>1</sup>.

После решения сравниваются условия и решения задач.

Этот завершающий этап объяснения материала является наиболее важным звеном в методике противопоставления: именно здесь ученики постигают взаимопереходы и взаимосвязи понятий и операций, усваивают приемы дифференцирования (различения) обеих задач.

Учитель. Чем отличается условие одной задачи от другой?

Ученик. В первой задаче мы находим часть вклада, во второй задаче — весь вклад.

Учитель. Что сходного, одинакового вы заметили в решениях этих задач?

Ученик. Обе задачи решены двумя действиями. Первое действие — деление, второе — умножение.

Учитель. Почему одинаковы первые вопросы?

Ученик. Там и тут мы находим, чему равна одна часть.

Учитель. Какие известные вам задачи напоминает данная задача?

Ученик. Задачи на приведение к единице.

Учитель. Правильно! Здесь мы тоже первым действием «приводим к единице» — находим одну часть.

Как показывает приведенный выше анализ решения подобных задач, опорными пунктами в цепи рассуждений являются числи-

<sup>1</sup> В методической литературе нет единства в употреблении терминов в данном разделе.

Так, в книге Е. Н. Саговской используются термины «часть от целого», «целое по части».

Более целесообразным представляется использовать вначале термины «найти часть от всего числа», «найти все число по его части», ибо понятие «целое число» в связи с введением понятия «дробное число» приобретает второй смысл.

Поэтому методически важно избегать многозначных терминов. В учебнике арифметики И. Н. Шевченко используется название «нахождение величины дроби данного числа»; нам представляется более удобным краткое название «нахождение части числа»; с употреблением данного названия дети свыклись еще в начальной школе, и поэтому психологически невыгодно перестраивать этот стереотип.



тели дробей; поэтому иногда чтение дробей следует варьировать, прочитывая их без упоминания знаменателя: не пять пятых, а пять частей и т. д. Нужно также делать ударения на числители: пять пятых, две пятых, одна пятая.

Попутно отметим, что основную информацию для отнесения задачи к одной из двух разновидностей («часть от числа» или «число по части») несут предлоги *от* и *по*; учитель должен их выделить голосом, делать на них логическое ударение, написать крупными буквами.

Если первая пара задач появилась в последовательности: *часть от числа* → *число по части*, то вторую пару задач следует решать в обратном порядке: *число по части* → *часть от числа*.

В правой половине листа (доски) записывается задача:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ————— } \square \text{ кг} \\ \frac{2}{7} \text{ ————— } 300 \text{ кг} \end{array}$$

Условие задачи может быть либо сообщено учителем, либо составлено с учащимися коллективно:

Со склада взяли  $\frac{2}{7}$  всего имевшегося там картофеля; это составило 300 кг. Сколько всего картофеля было первоначально?

После решения этой задачи ( $300 : 2 = 150$  (кг),  $150 \cdot 7 = 1050$  (кг) идет беседа учителя с учениками:

Учитель. Какого вида была решенная нами задача?

Ученик. Задача на нахождение всего числа по его части.

Учитель. Почему вы так думаете?

Ученик. Потому что в задаче дано, сколько килограммов составляет часть всего запаса ( $\frac{2}{7}$ ). А надо найти все число (1050 кг).

Учитель. Чтобы проверить решение данной задачи, надо составить обратную ей задачу. Каково название второй задачи?

Ученик. Задача на нахождение части от всего числа.

Учитель. Кто напишет схему второй задачи? Кто расскажет условие новой задачи?

На доске (в тетрадях) слева от предыдущей записи появляется новая запись:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ————— } 1050 \text{ кг} \\ \frac{2}{7} \text{ ————— } \square \text{ кг} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ————— } \square \text{ кг} \\ \frac{2}{7} \text{ ————— } 300 \text{ кг} \end{array}$$

Ученик читает условие проверочной задачи:

На складе было 1050 кг картофеля.  $\frac{2}{7}$  от этого количества взяли.

Сколько килограммов картофеля взяли?

Решение. 1)  $1050 : 7 = 150$  кг; 2)  $150 \cdot 2 = 300$  (кг).



В домашние или контрольные работы надо включать и задание по решению пар задач: если дана одна из двух задач, то ученик после решения должен преобразовать ее в обратную задачу и решить последнюю.

Впоследствии, конечно, решаются и изолированные задачи обеих разновидностей.

При одновременном (на одном уроке!) введении этих задач ученик приучается заранее, до того как приступит к решению задачи, определять ее вид.

В психологическом отношении преимущество одновременного изучения взаимно обратных (или сопряженных задач) заключается еще и в том, что здесь на первый план выступает обучение приемам различения вида задачи на основе выяснения ее характеристических признаков.

А это и означает овладение учеником логическими средствами анализа структуры задачи, зависимостей между ее величинами.

В этой связи отметим следующий полезный прием.

Прежде чем решать задачу по данной теме, на доске записывают названия обеих разновидностей задач:

Часть от всего числа.

Все число по его части.

Затем читается задача, подлежащая решению.

Учитель спрашивает: «Какого вида прочитанная задача? Почему так думаешь?»

После того как разновидность задачи будет определена, ученики решают ее в соответствующей половине страницы (или доски).

Выяснение разновидностей задач должно идти по пути от первоначального различения к последующему обобщению.

Для этой цели весьма удобны задачи промежуточные, которые не относятся ни к тому и ни к другому виду (такие задачи в существующей практике обучения не используются совершенно).

**Задача.** Турист проехал 45 км пути на велосипеде, и это составило  $\frac{5}{9}$  всего пути.  $\frac{2}{9}$  пути он прошел пешком. Сколько километров он прошел пешком?

**Схема задачи:**

$$\begin{array}{l} \frac{5}{9} \text{ ————— } 45 \text{ км} \\ \frac{2}{9} \text{ ————— } \text{ — } \text{ км} \end{array}$$

Задача решается двумя действиями:

1)  $45 : 5 = 9$  (км ехал на велосипеде);

2)  $9 \cdot 2 = 18$  (км шел пешком).

Затем можно сформулировать и решить обратную ей задачу по схеме:



$$\frac{5}{9} \text{ ————— } \square \text{ км}$$

$$\frac{2}{9} \text{ ————— } 18 \text{ км}$$

После того как будут изучены оба вида задач (на нахождение части от числа и числа по его части), при тренировке в устном решении их следует использовать следующую удобную форму записи условия:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\frac{1}{7}$ от 630 $\rightarrow$ $\square$ ; | 5) $\frac{5}{6}$ от $\square \rightarrow$ 300;   |
| 2) $\frac{1}{8}$ от $\square \rightarrow$ 40;     | 6) $\frac{\square}{9}$ от 270 $\rightarrow$ 60;  |
| 3) $\frac{1}{\square}$ от 320 $\rightarrow$ 80;   | 7) $\frac{7}{\square}$ от 500 $\rightarrow$ 350; |
| 4) $\frac{3}{8}$ от 560 $\rightarrow$ $\square$ ; | 8) $\square$ от 400 $\rightarrow$ 120.           |

Отметим, что из этих упражнений лишь 1), 2), 4) соответствуют задачам, изучаемым в начальной школе.

Остальные упражнения преследуют цель дальнейшего углубления знаний учащихся по данной теме.

Задача вида 3)  $\frac{1}{\square}$  от 320  $\rightarrow$  80 является третьей задачей совокупности задач. Какую часть составляет 80 от 320? (Решение.  $320 : 80 = 4$ , значит, 80 составляет  $\frac{1}{4}$  от 320.) Иногда полезно составить и решить по одному сюжету все три вида задач.

Например:

$$\frac{1}{7} \text{ от } 210 \rightarrow \square;$$

$$\frac{1}{7} \text{ от } \square \rightarrow 30;$$

$$\frac{1}{\square} \text{ от } 210 \rightarrow 30;$$

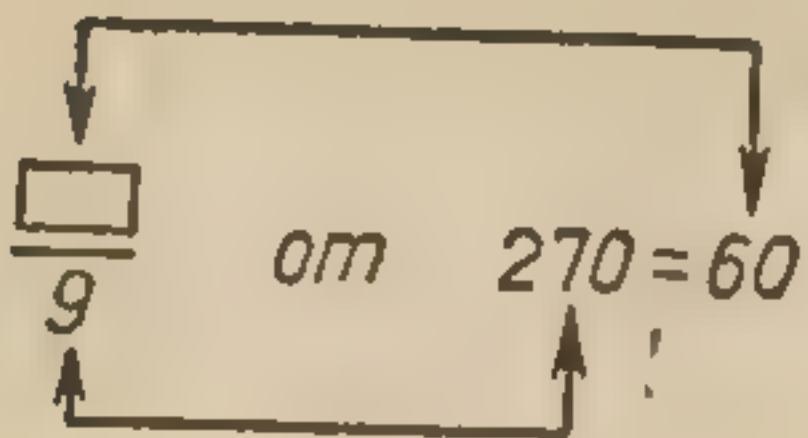


Рис. 31

Как показала практика, эти упражнения при правильной методике обучения усилены уже третьеклассникам (и тем более четвероклассникам).

При решении задачи вида 6)  $\frac{\square}{9}$  от 270  $\rightarrow$  60

рассуждаем так:

«В числе 270 должно быть 9 частей; одна часть будет равна  $270 : 9 = 30$ » (рис. 31).



Рассматриваем далее другую связь: «Число 60 связано с числителем. Сколько частей было взято? Сколько раз по 30 содержится в 60?  $60 : 30 = 2$  (раза). Значит, искомый числитель — 2.

Проверяем:  $\frac{2}{9}$  от 270 равно 60».

Последний пример вида  $\frac{\square}{\square}$  от 400 = 250 является неопределенным; он может быть предложен в качестве упражнения повышенной трудности. Решается этот пример подбором: пусть были десятые доли:

$\frac{\square}{10}$  от 400 = 120;  $400 : 10 = 40$ ;  $120 : 40 = 3$ . Значит,  $\frac{3}{10}$  от 400 = 120.

Могут быть и другие решения этой задачи:

$$\frac{6}{20} \text{ от } 400 \rightarrow 120; \quad \frac{12}{40} \text{ от } 400 \rightarrow 120.$$

#### 16. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ЧИСЛА И ВСЕГО ЧИСЛА ПО ЕГО ЧАСТИ В РАЗДЕЛЕ ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

После введения умножения и деления дробей через несколько уроков мы изучаем совместно задачи на нахождение части числа и числа по его части.

Изучение этих задач в разделе дробных чисел следует начать с устного решения такой пары задач на небольших целых числах, например:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ ————— } 12 \text{ м} & 1 \text{ ————— } ? \text{ м} \\ \frac{2}{3} \text{ ————— } ? \text{ м} & \frac{2}{3} \text{ ————— } 8 \text{ м} \end{array}$$

Далее мы рассматриваем основную случай.

Пусть требуется решить задачу:

1 кг помидоров стоит  $\frac{4}{5}$  руб.

Сколько стоит  $\frac{3}{8}$  кг помидоров?

**Решение.**

1-й способ. Чтобы найти стоимость товара, надо цену умножить на количество товара:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{3}{10} \text{ (руб.)}$$

После решения задачи на нахождение части от числа составляем обратную задачу, т. е. решаем задачу на нахождение числа по его части:

$\frac{3}{8}$  кг помидоров стоят  $\frac{3}{10}$  руб.

Сколько стоит 1 кг помидоров?

**Решение.**

1-й способ. Чтобы найти цену товара, надо стоимость разделить на количество товара:

$$\frac{3}{10} : \frac{3}{8} = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3} = \frac{4}{5} \text{ (руб.)}$$



2-й способ. Сначала найдем стоимость  $\frac{1}{8}$  кг, для чего надо  $\frac{4}{5}$  уменьшить в 8 раз:

$$\frac{4}{5} : 8 = \frac{4}{5 \cdot 8} \text{ (руб.)}$$

Потом найдем стоимость  $\frac{3}{8}$  кг, что больше стоимости  $\frac{1}{8}$  кг в 3 раза:

$$\frac{3}{8} \text{ от } \frac{4}{5}; \quad \frac{4}{5} : 8 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{3}{10} \text{ (руб.)}$$

Получили тот же самый ответ, что и первым способом.

Дети немедленно приходят к выводу: часть от числа проще, удобнее находить умножением.

**Правило.** Чтобы найти часть от числа, надо это число умножить на данную дробь:

$$\frac{a}{b} \text{ от } \frac{k}{p}; \quad \frac{k}{p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{p \cdot b}$$

Положительной стороной данного методического подхода является то, что в нем главным способом решения множества задач на нахождение части числа и числа по его части сразу становится само действие второй ступени (умножение и деление соответственно).

Целесообразно эту же самую пару задач решить в десятичных дробях.

Совпадение ответов при двух способах решения существенно усиливает обоснованность, убедительность выполняемых преобразований.

Заменим сначала обыкновенные дроби десятичными:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0,8;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{375}{1000} = 0,375;$$

$$\frac{3}{10} = 0,3.$$

2-й способ. Сначала найдем стоимость  $\frac{1}{8}$  кг, для чего надо  $\frac{3}{10}$  уменьшить в 3 раза:

$$\frac{3}{10} : 3 = \frac{3}{10 \cdot 3} \text{ (руб.)}$$

Потом найдем стоимость  $\frac{8}{8}$  кг = 1 кг, что больше стоимости  $\frac{1}{8}$  кг в 8 раз:

$$\frac{3}{10 \cdot 3} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3} = \frac{4}{5} \text{ (руб.)}$$

что и должно быть согласно первому решению.

Вместе с учащимися выводим правило: число по части быстрее и удобнее находить делением.

**Правило.** Чтобы найти число по его части, надо выполнить деление на данную дробь.

Если  $\frac{a}{b}$  от  $x$  равно  $\frac{k}{p}$ , то

$$x = \frac{k}{p} : \frac{a}{b} = \frac{k}{p} \cdot \frac{b}{a} = \frac{k \cdot b}{p \cdot a}$$



Если решаются эти две задачи в обыкновенных дробях, то, как мы видели выше, возможны два способа решения (подробное и свернутое); если же эти задачи решаются в десятичных дробях, то возможно лишь решение одним сокращенным способом.

**Нахождение части числа.**

1 кг — 0,8 руб.  
0,375 кг — ?

**Решение.**

Чтобы найти стоимость, надо цену умножить на количество товара:

$$0,8 \cdot 0,375 = 0,3 = \frac{3}{10} \text{ (руб.)}$$

**Нахождение числа по величине его части.**

1 кг — ?  
0,375 кг — 0,3

**Решение.**

Чтобы найти цену, надо стоимость разделить на количество товара:

$$0,3 : 0,375 = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ руб.}$$

Значит, и в случае десятичных дробей остаются справедливыми правила нахождения  $\frac{\text{части числа}}{\text{числа по его части}}$  соответственно  $\frac{\text{умножением}}{\text{делением}}$  на эту часть.

Полезно решать чаще задачи, в условии которых используются оба вида дробей.

**Прямая задача.**

В цистерну входит  $12\frac{3}{5}$  т керосина. Из них продали 0,4 части. Сколько продали керосина?

**Обратная задача.**

Из цистерны продали 0,4 части, или 5,04 т. Какова вместимость цистерны?

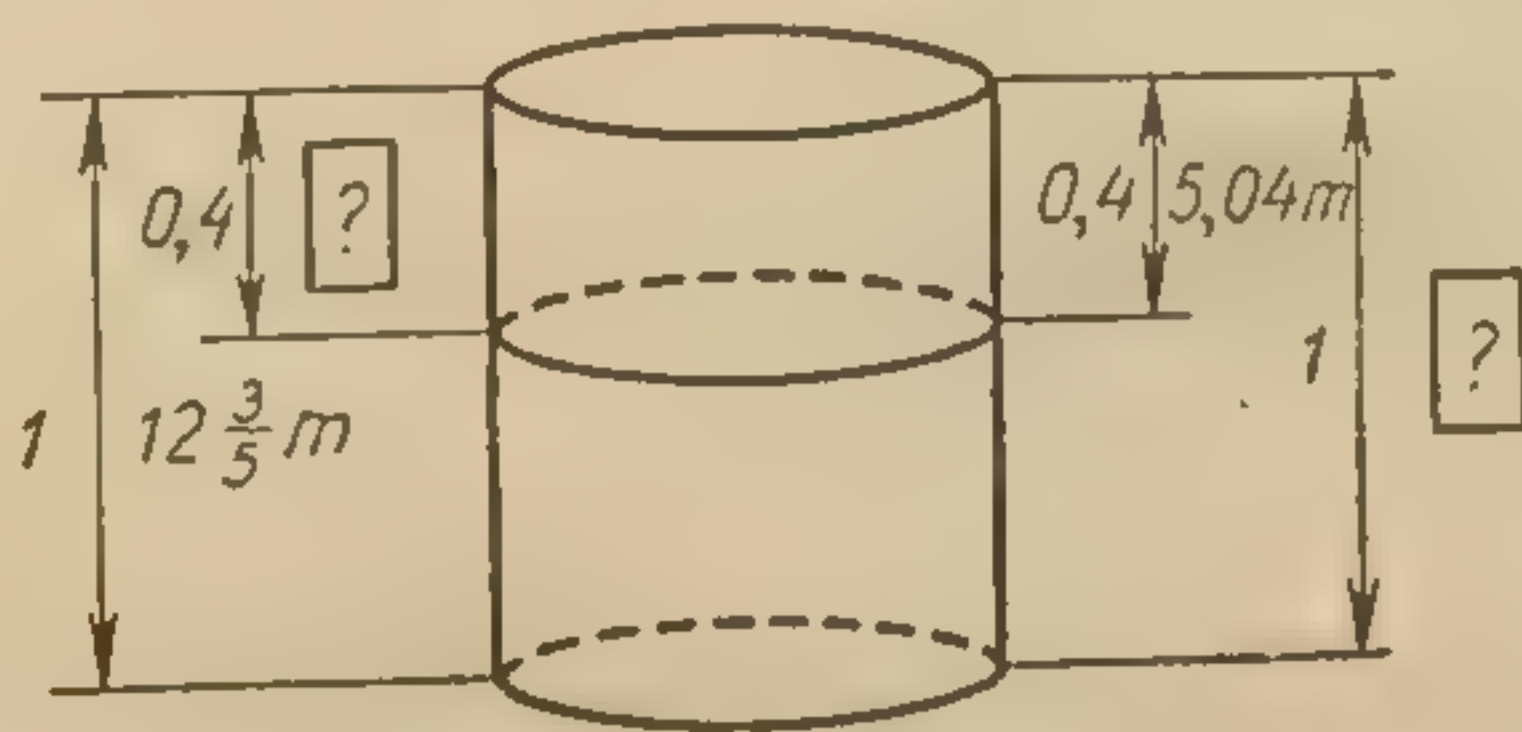


Рис. 32

Необходимо добиться того, чтобы дети воспринимали понятия *умножение на дробь* и *нахождение части числа*, а также и *нахождение числа по части* и *деление на дробь* как, синонимы.



Для этой цели важно противопоставлять обе задачи, предлагая следующие парные вопросы:

1. Каким действием решается задача на нахождение части числа? всего числа по его части?

2. Задача решена умножением некоторой дроби на 0,6. Какого типа была задача? (На нахождение всего числа по части или части от числа.) Составить такую задачу.

3. Задача решена делением некоторой дроби на  $\frac{2}{3}$ . Какого типа была задача? (На нахождение всего числа по его части или части от числа.) Составить такую задачу.

4. Задача решена умножением некоторой дроби на  $\frac{2}{3}$ . Какого типа была задача? (На нахождение всего числа по его части или части от числа.) Придумать такую задачу.

5. Весьма уместны деформированные примеры:

$$\frac{2}{5} ? \frac{9}{10} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 9}; \quad \frac{\square}{\square} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 5}.$$

(Здесь вместо знака вопроса требуется подобрать знак соответствующего действия.)

$$\frac{5}{6} : \frac{\square}{\square} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 10}; \quad \frac{6}{7} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 8} \text{ и т. п.}$$

Далее выполняются парные, тренировочные упражнения, причем направление преобразования систематически изменяется.

Пусть предложена задача:

За  $\frac{4}{5}$  м ленты заплатили  $\frac{12}{25}$  руб. Сколько стоит 1 м ленты?

Решение.

Количество товара известно, стоимость известна, неизвестна цена 1 м ленты. Чтобы найти цену, надо стоимость разделить на количество товара:

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{12 \cdot 5}{25 \cdot 4} = \frac{3}{5} \text{ (руб.)}.$$

Условие решенной задачи записывается так:

$$\frac{4}{5} \text{ м, } \frac{12}{25} \text{ руб., } \square.$$

По решению составляется схема обратной задачи:

$$\frac{4}{5} \text{ м, } \square, \frac{3}{5} \text{ (руб.)}.$$

К схеме составляется условие задачи:

1 м ленты стоит  $\frac{3}{5}$  руб. Сколько стоят  $\frac{4}{5}$  м?



Р е ш е н и е.

Цена 1 м ленты известна —  $\frac{3}{5}$  руб

Количество товара известно —  $\frac{4}{5}$  м.

Стоимость товара неизвестна. Чтобы найти стоимость, надо цену умножить на количество товара.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

Проверка ответа первой задачи закончена. Если ученики встречаются с затруднениями при кратком способе решения посредством умножения (деления) на дробь, надо некоторые задачи решать двумя способами с подробной записью условия задачи в две строки.

П р я м а я    з а д а ч а.

1 м —  $\frac{3}{5}$  руб.

$\frac{4}{5}$  м —

Р е ш е н и е.

1-й способ

$$\frac{3}{5} : 5 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

2-й способ

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

О б р а т н а я    з а д а ч а.

1 м —

$\frac{4}{5}$  м —  $\frac{12}{25}$  руб.

Р е ш е н и е.

1-й способ

$$\frac{12}{25} : 4 \cdot 5 = \frac{12^3 \cdot 5^1}{25^5 \cdot 4_1} = \frac{3}{5} \text{ (руб.)}$$

2-й способ

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{12^3 \cdot 5^1}{25^5 \cdot 4_1} = \frac{3}{5} \text{ (руб.)}$$

**17. РАБОТА НАД ТРОЙКОЙ ЗАДАЧ: НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ЧИСЛА, ЧИСЛА ПО ВЕЛИЧИНЕ ЕГО ЧАСТИ И ЗАДАЧИ ТИПА «КАКУЮ ЧАСТЬ СОСТАВЛЯЕТ ОДНО ЧИСЛО ОТ ДРУГОГО?» (ОТНОШЕНИЕ ЧИСЕЛ)**

В связи с решением двух взаимно обратных задач иногда необходимо составлять третью разновидность задачи; решение такой тройки задач обеспечивает прочную циклическую связь мыслей.

I. Пусть была решена задача:

Рабочий заработал 92 руб., 0,4 этой суммы он положил на сберкнижку. Сколько денег он положил на сберкнижку?

Записываем условие задачи в виде следующей схемы:

92 руб.; 0,4;

II. Составляем схему первой обратной задачи:

; 0,4; 36,8 руб.

Рабочий положил 0,4 своих денег на сберкнижку, т. е. 36,8 руб. Сколько денег было у него первоначально?



Решение.

$$36,8 : 0,4 = 92 \text{ (руб.)}.$$

III. Составляем схему третьей задачи:

$$92 \text{ руб.}, \square; 36,8 \text{ руб.}$$

Рабочий заработал всего 92 руб. Из них он положил на сберкнижку 36,8 руб. Какую часть своих денег он положил на сберкнижку?

Решение.

Чтобы найти, какую часть составляет меньшее число от большего, необходимо меньшее число разделить на большее:

$$36,8 : 92 = 0,4 \text{ (части)}.$$

Ответ. Рабочий положил на сберкнижку 0,4 своих денег.

Последняя задача на нахождение отношения меньшего числа к большему, но мы решаем эту задачу, не используя термина «отношение», а поставив вопрос: какую часть составляет одно число от другого?

Впоследствии употребляются оба названия задач одновременно, т. е. используется оборот: отношение меньшего числа к большему.

В качестве исходной задачи может быть предложена и задача такого вида:

Отцу 40 лет, а сыну 15 лет. Какую часть возраста отца составляет возраст сына?

Решение.

Чтобы определить, какую часть составляет одно число от другого, выполним деление:  $15 : 40 = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ .

Возраст сына составляет  $\frac{3}{8}$  от возраста отца.

Напишем схему решенной прямой задачи:

$$40 \text{ л.}, 15 \text{ л.}, \frac{3}{8}.$$

II. Сделаем искомым число 15:

$$40 \text{ л.}, \square, \frac{3}{8}.$$

Отцу 40 лет, возраст сына составляет  $\frac{3}{8}$  части от возраста отца. Сколько лет сыну?

Решение.

$$\frac{3}{8} \text{ от } 40 \rightarrow 40 \cdot \frac{3}{8} = \dots \text{ и т. д.}$$

III. Наконец, пусть неизвестным будет число 40:

Сын 15 лет  
Сколько лет  
Решение

Работа на  
основным пр  
задачами.  
Полезно  
соотношения

$$\frac{3}{8} \text{ от } 40$$

Выясняет  
дробь) резу  
при определ  
оказывается

В другой  
правильную  
дробь, число

Для того  
упражнения

1. Некот  
меньше мн  
или неправ

2. Некот  
или частнос  
числа или

3. Число  
больше: А

4. Если  
ше: А или

18  
В суще  
бями рассм  
вычитание,



$$15 \text{ л.} \quad \frac{3}{8}$$

Сыну 15 лет. Возраст сына составляет  $\frac{3}{8}$  от возраста отца.  
Сколько лет отцу?  
Решение.

$$15 : \frac{3}{8} = \dots$$

Работа над такими тройками задач должна стать в дальнейшем основным приемом работы над данными тремя взаимосвязанными задачами.

Полезно проанализировать первые две задачи с точки зрения соотношения между исходным числом и результатом, например:

$$\frac{3}{8} \text{ от } 40 \rightarrow 40 \cdot \frac{3}{8} = 15;$$

$$15 < 40.$$

$$\frac{3}{8} \text{ от } x \rightarrow 15;$$

$$x = 15 : \frac{3}{8} = \frac{15 \cdot 8}{3} = 40;$$

$$40 > 15.$$

Выясняется, что при нахождении части от числа (правильная дробь) результат будет меньше исходного числа ( $15 < 40$ ); при определении числа по его части (правильная дробь) результат оказывается больше исходного числа ( $40 > 15$ ).

В другой форме это выражается так: когда умножают число на правильную дробь, число уменьшается; когда делят на правильную дробь, число увеличивается.

Для того чтобы ученики уяснили эти факты, следует предлагать упражнения следующих видов:

1. Некоторое число умножили на дробь. Произведение оказалось меньше множимого. На какую дробь умножали (правильную или неправильную)? Привести пример.

2. Некоторое число разделили на  $\frac{2}{3}$ . Что будет больше: делимое или частное? Привести пример. Находим ли в этом случае часть числа или число по его части?

3. Число  $A$  разделили на дробь  $0,4$ , получили в частном  $B$ . Что больше:  $A$  или  $B$ ? Привести пример.

4. Если  $A$  разделить на неправильную дробь, то что будет больше:  $A$  или частное  $B$ ? Привести пример.

## 18. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВОЙСТВ ДЕЙСТВИЙ НА ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

В существующей практике обучения изучение действий с дробями рассматривается последовательно одно за другим: сложение, вычитание, умножение, деление.



Между тем, используя методы противопоставления, эти вопросы удастся изучить более рациональным путем.

Пусть решен пример на вычитание:

$$3,6 - 2,2 = 1,4.$$

Превратим его в уравнение, скажем, с неизвестным уменьшаемым:

$$x - 2,2 = 1,4.$$

Уменьшаемое находится действием, обратным вычитанию:

$$x = 1,4 + 2,2 = 3,6.$$

То же самое делается в упражнениях на действия второй ступени:

$$5\frac{2}{7} \cdot 2 = 10\frac{4}{7};$$

$$x \cdot 2 = 10\frac{4}{7};$$

$$x = 10\frac{4}{7} : 2 = 5\frac{2}{7}.$$

Полезно иногда сопоставить решение двух примеров на нахождение неизвестного слагаемого и сомножителя, уменьшаемого и делимого, вычитаемого и делителя, записывая эти примеры рядом в двух столбцах.

Приведем пример к последнему случаю:

$$3\frac{5}{8} - x = 1\frac{1}{2}.$$

Решение.

$$x = 3\frac{5}{8} - 1\frac{1}{2} \dots$$

$$2\frac{3}{8} : x = 1\frac{3}{16}.$$

Решение.

$$x = 2\frac{3}{8} : 1\frac{3}{16} \dots$$

Приходим к суждению: *вычитаемое находится вычитанием, а делитель — делением*<sup>1</sup>.

Для сложения и умножения дробных чисел рассматриваются одновременно переместительный и сочетательный законы.

Соответствующие упражнения необходимо подобрать так, чтобы использование законов заметно ускоряло и облегчало вычисления (особенно устные), т. е. чтобы была видна польза от применения этих законов.

<sup>1</sup> Вопросы сопоставления в разделе целых чисел рассмотрены нами в книге «Методика упражнений по арифметике и алгебре». М., «Просвещение», 1965.



Упражнения на переместительные законы  
сложения:

$$35\frac{2}{17} + 120\frac{13}{34} + 4\frac{15}{17} = (35\frac{2}{17} + 4\frac{15}{17}) + 120\frac{13}{34} = 40 + 120\frac{13}{34} = 160\frac{13}{34};$$

$$0,81 + 3,67 + 5,19 = (0,81 + 5,19) + 3,67 = 6 + 3,67 = 9,67.$$

Упражнения на сочетательные законы  
сложения:

$$30 + 13\frac{3}{8} + 63\frac{2}{17} + 6\frac{5}{8} = 30 + 13\frac{3}{8} + 6\frac{5}{8} + 63\frac{2}{17} =$$

(применили переместительный закон сложения)

$$= 30 + (13\frac{3}{8} + 6\frac{5}{8}) + 63\frac{2}{17} =$$

(применили сочетательный закон сложения)

$$= 30 + 20 + 63\frac{2}{17} = 113\frac{2}{17}.$$

умножения:

$$\frac{5}{8} \cdot 12\frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{5} = (\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}) \cdot 12\frac{1}{5} = 1 \cdot 12\frac{1}{5} = 12\frac{1}{5};$$

$$0,4 \cdot 35,8 \cdot 2,5 = (0,4 \cdot 2,5) \cdot 35,8 = 1 \cdot 35,8 = 35,8.$$

умножения:

$$25\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 1\frac{1}{4} =$$

$$= 25\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot 3 =$$

(применили переместительный закон умножения)

$$= 25\frac{1}{6} \cdot (\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}) \cdot 3 =$$

(применили сочетательный закон умножения)

$$= 25\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 3 = 75\frac{1}{2}.$$

Среди упражнений должны содержаться как прямые, так и деформированные:

$$2\frac{5}{11} + 49\frac{1}{2} + 3\frac{6}{11} =$$

$$45\frac{2}{7} + \square + 4\frac{5}{7} = 63\frac{4}{8};$$

$$\square + 20\frac{4}{15} + 1\frac{13}{16} = 30\frac{4}{15};$$

$$3,53 + \square + 4,47 = 18,29.$$

$$\frac{4}{5} \cdot 13\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} =$$

$$\square \cdot 16\frac{2}{7} \cdot 3\frac{1}{4} = 16\frac{2}{7};$$

$$2\frac{1}{5} \cdot \square \cdot \frac{5}{11} = 100;$$

$$0,125 \cdot \square \cdot 80 = 136.$$

Очень важное значение при изучении умножения и деления смешанных чисел на целое число имеет правильное использование распределительного закона умножения и деления, поэтому оба действия можно рассматривать одновременно:

$$26\frac{3}{7} \cdot 2 = (26 + \frac{3}{7}) \cdot 2 = 26 \cdot 2 + \frac{3}{7} \cdot 2 = 52 + \frac{6}{7} = 52\frac{6}{7}.$$

$$52\frac{6}{7} : 2 = (52 + \frac{6}{7}) : 2 = 52 : 2 + \frac{6}{7} : 2 = 26 + \frac{3}{7} = 26\frac{3}{7}.$$



Уместно предложить несколько пар примеров на применение распределительного свойства к вычитанию:

$$\begin{array}{l|l} 99\frac{19}{20} : 4 = \left(100 - \frac{1}{20}\right) : 4 = 100 : 4 - \frac{1}{20} : 4 = 25 - \frac{1}{80} = 24\frac{79}{80}; & 24\frac{79}{80} \cdot 4 = \left(25 - \frac{1}{80}\right) \cdot 4 = 25 \cdot 4 - \frac{1}{80} \cdot 4 = 100 - \frac{1}{20} = 99\frac{19}{20}; \\ 99\frac{17}{19} : 2 = \left(100 - \frac{2}{19}\right) : 2 = \dots & 49\frac{17}{19} : 2 = \left(50 - \frac{2}{19}\right) \cdot 2 = \dots \end{array}$$

При повторении изменения результатов действий в зависимости от изменения компонентов достаточно ограничиться простейшими случаями, причем в примеры нужно иногда включать и целые числа, рассматривая их как частный случай дробных чисел. В этих упражнениях удобны записи в три строчки, известные нам по предыдущему изложению.

### Изменение

суммы:

$$4\frac{5}{8} + 10 = 14\frac{5}{8}.$$

Одно слагаемое увеличиваем на  $\frac{1}{8}$ .

К этой записи учитель составляет совместно с учениками задачу:

*Как изменится сумма двух чисел, если одно слагаемое оставили постоянным, а другое увеличили на  $\frac{1}{8}$ ?*

Ученик должен дать предварительный ответ:

«...сумма увеличится на  $\frac{1}{8}$ ».

Потом убеждается в этом посредством подробных вычислений (в уме):

$$1) 4\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = 4\frac{6}{8};$$

$$2) 4\frac{6}{8} + 10 = 14\frac{6}{8};$$

$$3) 14\frac{6}{8} - 14\frac{5}{8} = \frac{1}{8}.$$

произведения:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}.$$

Один сомножитель увеличиваем в 10 раз.

К этой записи учитель составляет совместно с учащимися задачу:

*Как изменится произведение двух чисел, если один сомножитель увеличили в 10 раз, а другой оставили постоянным?*

Ответ ученика:

«...произведение также увеличится в 10 раз».

Ответ подтверждается подробными вычислениями в уме:

$$1) \frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{30}{5} = 6;$$

$$2) 6 \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{7};$$

$$3) \frac{12}{7} : \frac{6}{35} = \frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 6} = 10.$$

Произведение увеличилось в 10 раз.



И в том и в другом случае нехотим, чтобы результат приобретал следующий вид:

$$4\frac{5}{8} + 10 = 14\frac{5}{8}$$

$$\frac{\left(+\frac{1}{8}\right)\left(+\frac{1}{8}\right)}{4\frac{6}{8} + 10 = 14\frac{6}{8}}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{(-10)(-10)}{6 \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{7}}$$

В отдельных случаях полезно сопоставлять влияние одновременного изменения обоих компонентов на результат действия:

#### Изменение

разности:

$$8\frac{7}{9} - 2\frac{3}{9} = 6\frac{4}{9}$$

$$\frac{\left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)}{\dots\dots\dots} = 6\frac{4}{9}$$

Если уменьшаемое и вычитаемое уменьшить на одно и то же число, то разность не изменяется.

частного:

$$\frac{4}{15} : \frac{4}{45} = 3$$

$$\frac{(:5)(:5)}{\dots\dots\dots} = 3$$

Если делимое и делитель уменьшить в одно и то же число раз, то частное не изменится.

#### Когда не изменяется

сумма:

$$8,35 + 1,65 = 10,00$$

$$\frac{(-0,21)(+0,21)}{? + ? = 10,00}$$

произведение:

$$0,3 \cdot 2,2 = 6,6$$

$$\frac{(-10)(-10)}{? \cdot ?} = 6,6$$

#### Когда не изменяется

разность:

$$6,87 - 2,37 = 4,50$$

$$\frac{(+1,11)(+1,11)}{? - ? = 4,50}$$

частное:

$$2,8 : 4 = 0,7$$

$$\frac{(-100)(-100)}{? : ?} = 0,7$$



## 19. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

В существующей программе задачи на проценты выделены в отдельную тему и изучаются после десятичных дробей путем сведения их к нахождению части числа и числа по величине его части.

Пусть дана задача:

*Семья заработала за месяц 300 руб. Из них 6% израсходовали на оплату квартиры. Сколько денег израсходовали на оплату квартиры?*

Общепринятый сейчас способ решения этой задачи сводится к тому, что необходимо, во-первых, 6% переосмыслить как шесть сотых ( $6\% \rightarrow \frac{6}{100}$ ), во-вторых, изобразить эту дробь в виде десятичной дроби:  $6\% \rightarrow 0,06$ , в-третьих, задачу на нахождение дроби от числа: найти 6% от числа — это значит найти 0,06 от этого числа. Но вот посмотрим, что дальше получается:

6% от 300;  $6\% \rightarrow 0,06$ ; 0,06 от 300;  $300 \cdot 0,06 = 18$  (руб.).

Решение этой же задачи без обращения процентов в десятичную дробь выглядит так:  $6\%$  от 300  $\rightarrow \frac{300 \cdot 6}{100} = 18$  (руб.).

Решение обратной задачи в действующих учебниках выглядит так:

$$\begin{aligned} 6\% \text{ от } x &\rightarrow 18 \text{ руб.} \\ 0,06 \text{ от } x &\rightarrow 18 \text{ руб.} \\ x &= 18 : 0,06 = 1800 : 6 = 300 \text{ (руб.).} \end{aligned}$$

Без обращения процентов в десятичную дробь решение обратной задачи осуществляется опять же короче:  $6\%$  от  $x \rightarrow 18$  (руб.);

$$x = \frac{18 \cdot 100}{6} = 300 \text{ (руб.).}$$

Рассмотрим подробнее последнюю задачу. По первому способу решения вначале заменяем 6% дробью 0,06, выполнив по существу деление ( $6 : 100 \rightarrow 0,06$ ); далее приходится выполнять снова обратное преобразование, а именно делитель 0,06 заменяем числом 6, умножив делимое и делитель на 100 ( $18 : 0,06 = 1800 : 6 =$  и т. д.).

Существующая схема решения задач на проценты посредством замены последних десятичной дробью нередко приводит к лишним преобразованиям, т. е. к усложнению решения.

Поэтому целесообразно обходиться вторым способом решения этих задач, наиболее распространенным в технических и экономических расчетах (без замены процентов дробью).

Обычно задачи на проценты рассматривают одну за другой на разных уроках; между тем их целесообразно рассматривать одновременно, одну в сравнении с другой.



Нахождение процента от числа.

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } 300 \\ 6\% \text{ — } \square \end{array}$$

Решение.

$$\frac{300}{100} \cdot 6 = \frac{300 \cdot 6}{100} = 18 \text{ (руб.)}$$

Нахождение числа по процентам.

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } \square \\ 6\% \text{ — } 18 \text{ руб.} \end{array}$$

Решение.

$$\frac{18}{6} \cdot 100 = 300 \text{ (руб.)}$$

Если первая пара задач рассматривалась в прямом порядке (от задачи на нахождение процентов к задаче на нахождение числа по его процентам), то вторую пару задач надо решить в противоположном порядке: сначала решить задачу второго вида, а потом ее решение проверить решением обратной задачи.

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } 35 \text{ человек,} \\ 60\% \text{ — } \square. \end{array}$$

Решение.

$$\frac{35}{100} \cdot 60 = 21 \text{ (человек).}$$

В классе была 21 девочка, что составляет 60% всех учащихся. Сколько было учащихся в классе?

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } \square, \\ 60\% \text{ — } 21 \text{ человек.} \end{array}$$

Решение:

$$\frac{21 \cdot 100}{60} = 35 \text{ (человек).}$$

Потом записывается схема, а по ней составляется обратная задача и решается.

Задачи на проценты (решаемые, кстати сказать, всего лишь двумя отдельными действиями) оказались в нашем эксперименте вполне возможным изучать уже в III классе. Если бы этот шаг был осуществлен, то снова заметно было бы облегчено изучение арифметики в IV—V классах.

Рассматривая краткую запись условия обеих задач на проценты, мы видим, что они относятся к виду задач на «прямое приведение» к единице:

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } 300 \text{ руб} \\ 60\% \text{ — } \square \text{ руб.} \end{array}$$

Решение. 1)  $300 : 100 = 3$  (руб.); 2)  $3 \cdot 6 = 18$  (руб.)

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — } \square \text{ руб.} \\ 60\% \text{ — } 18 \text{ руб.} \end{array}$$

Решение. 1)  $18 : 6 = 3$  (руб.); 2)  $3 \cdot 100 = 300$  (руб.).

Решения обеих задач осуществляются двумя действиями: делением (первое действие) и умножением (второе действие).



Задача же на нахождение процентного отношения чисел относится уже к задачам на «обратное приведение к единице», так как решается двумя действиями деления.

**Задача.** Семья получила за месяц 300 руб. Из них за квартиру заплатила 18 руб. Сколько процентов денег она израсходовала на оплату квартиры?

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ ————— } 300 \text{ руб.} \\ \square \% \text{ ————— } 18 \text{ руб.} \end{array}$$

**Решение.** 1)  $300 : 100 = 3$  (руб.);  
2)  $18 : 3 = 6$  (%).

Проведенный выше анализ показывает, что задачи на проценты отнюдь не должны связываться с десятичными дробями.

Проценты могут изучаться до знакомства с последними даже в начальной школе и в разделе натуральных чисел в начале четвертого года обучения.

Решение любой задачи на проценты связано с использованием постоянного числа долей (100%) и потому достигается даже более прозрачными умозаключениями, чем решение задач на нахождение части числа и числа по его части.

Задачи на проценты по своей структуре значительно ближе к задачам на прямое и обратное приведение к единице, изучаемым во II классе, чем к задачам на нахождение части числа и числа по его части.

При решении задач на нахождение процентного отношения необходимо пользоваться либо подробным способом решения (как показано выше — в два действия), либо свернутым правилом:

- 1) Находим, чему равен 1% числа:  $\left(\frac{300}{100}\right)$ .
- 2) Определяем, сколько процентов составляют 18 руб.

$$18 : \frac{300}{100} = \frac{18 \cdot 100}{300} = \frac{18}{3} \cdot 100.$$

По последней записи формулируем правило нахождения процентного отношения.

Это правило можно на первых порах сформулировать, не используя понятия *процентного отношения*, скажем, так:

*Чтобы определить, сколько процентов составляет одно число от другого, надо первое число разделить на второе, а потом умножить на 100.*

В такой формулировке правило можно использовать после введения понятия о получении дроби путем деления одного числа на другое, т. е. с самого начала курса обыкновенных дробей: изучением тройки задач на проценты надо заниматься в V классе.

После изучения темы «Отношение» то же правило формулируется короче, в общепринятой форме:

Умножить на 100  
получим ответ  
из дроби.  
Наряду с реше-  
нием практиче-  
ского и набору ч-  
из этой тройки  
В связи с изу-  
чением с пользо-  
Показано на

Табл  
(a -

	b	0
1	0,700	0
2	1,400	1
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

2  
Совместное  
дает благопри-  
вычислений.  
Во всех пи-  
вагья точнос-  
В данной



Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо найти отношение этих чисел, а потом умножить его на 100. Понятие отношения вполне уместно дать в V классе в связи с делением дроби на дробь.

Наряду с решением задач с различными сюжетами иногда необходимо практиковать решение всех трех задач по одному сюжету и набору чисел, причем первой, исходной может быть любая из этой тройки задач.

В связи с изучением задач на проценты можно ознакомить учащихся с использованием таблицей процентов числа.

Показано начало такой таблицы (7% от всех двузначных чисел).

Таблица нахождения 7% от двузначных чисел  $ab$   
( $a$  — первая цифра числа,  $b$  — вторая цифра числа)

$b \backslash a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0,070	0,140	0,210	0,280	0,350	0,420	0,490	0,560	0,630
1	0,700	0,770	0,810	0,910	0,980	1,050	1,120	1,190	1,260	1,330
2	1,400	1,470	1,540	1,610	1,680	1,750	1,820	1,890	1,960	2,030
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

## 20. ОБ ИЗУЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СВЯЗИ С ИЗУЧЕНИЕМ ДЕЙСТВИЙ НАД ДРОБЯМИ

Совместное изучение обыкновенных и десятичных дробей создает благоприятные условия для раннего внедрения приближенных вычислений.

Во всех письменных вычислениях, вероятно, можно ограничиваться точностью счетной линейки (три десятичных знака).

В данной связи становится понятной целесообразность уделять



большее внимание в течение всего времени изучения дробей округлению чисел до 1—2 знаков:

$$\frac{3}{8} m = 0,375 m \approx 0,38 m.$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 \approx 0,8.$$

$$\text{Значит, } \frac{3}{8} m \approx 0,38 m.$$

Округлением результатов надо завершать решение большинства примеров, например:  $3\frac{3}{4} + 4,4 = 3,75 + 4,4 = 8,15 \approx 8,2$ .

$$\text{Значит, } 3\frac{3}{4} + 4,4 \approx 8,2^1.$$

В связи с изучением приближенных вычислений представляется весьма целесообразным возможно раньше начать работу со счетной линейкой и с таблицей приближенных произведений и частных.

В таблице даны приближенные (т. е. округленные до 0,001) частные от деления числа 10 на все двузначные числа вида  $\overline{ab}$  ( $a$  — первая цифра числа,  $b$  — вторая цифра).

В учебнике возможно поместить остальные таблицы частных 20, 30, ..., 90 на все двузначные числа.

Таблица трехзначных приближенных частных, полученных при делении числа 10 на двузначное число  $\overline{ab}$ : т. е.  $\frac{10}{\overline{ab}} = 10 : \overline{ab}$

Вторая цифра  $b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первая цифра $a$	0	10,0	5,00	3,33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	
	1	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,555	0,526	
	2	0,500	0,476	0,455	0,435	0,417	0,400	0,385	0,370	0,357	0,345
	3	0,333	0,323	0,313	0,303	0,29	0,286	0,278	0,270	0,263	0,256
	4	0,250	0,244	0,238	0,233	0,227	0,222	0,217	0,212	0,208	0,204
	5	0,200	0,196	0,192	0,188	0,185	0,181	0,179	0,175	0,172	0,169
	6	0,167	0,164	0,161	0,159	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,144
	7	0,143	0,141	0,139	0,137	0,135	0,133	0,131	0,130	0,128	0,127
	8	0,125	0,123	0,120	0,119	0,118	0,118	0,116	0,115	0,114	0,112
	9	0,111	0,110	0,109	0,108	0,106	0,105	0,104	0,103	0,102	0,101

Пусть решен пример в обыкновенных дробях:

$$\frac{15}{42} + \frac{14}{7} = \frac{5 + 24}{42} = \frac{29}{42}.$$

<sup>1</sup> Решение одного и того же примера в десятичных и обыкновенных дробях означает новый источник обратных связей в мышлении. Поэтому эти упражнения имеют важное значение для сознательного усвоения знаний.



Проведем контроль решения примера в десятичных дробях: находим по таблице приближенное частное  $\frac{10}{42} \approx 0,238$ .

Дробь  $\frac{1}{42}$  будет меньше  $\frac{10}{42}$  в 10 раз.

Значит,  $\frac{1}{42} \approx 0,0238$ .

Чтобы найти  $\frac{5}{42}$ , надо умножить этот ответ на 5:

$$\begin{array}{r} \times 0,0238 \\ 5 \\ \hline 0,1190 \end{array}$$

Точно так же имеем:  $\frac{10}{7} \approx 1,43$ ;  $\frac{1}{7} \approx 0,143$ ;  $\frac{4}{7} = \frac{1}{7} \cdot 4 \approx 0,572$ .

Разумеется, не все операции по превращению дробей нужно приводить по таблицам: напротив, некоторые дроби заменяются десятичными прямым вычислением:  $\frac{29}{42} = ?$

$$\begin{array}{r} 290 \overline{) 42} \\ \underline{252} \phantom{0} \\ 380 \\ \underline{378} \\ 120 \\ \underline{84} \\ \hline \end{array}$$

Итак,  $\frac{29}{42} \approx 0,692$ .

Найдем приближенное значение суммы:

$$\frac{5}{42} + \frac{4}{7} \approx 0,119 + 0,572 \approx 0,691 \approx 0,69.$$

Однако  $\frac{29}{42} \approx 0,692 \approx 0,69$ .

Надо пояснить учащимся, что результаты приближенных вычислений в своей последней цифре могут различаться на 1—2 единицы.

Если же округлить их до следующего разряда, например до сотых, то приближенные ответы совпадают.

В связи с изучением приближенных вычислений возникает возможность раннего ознакомления со счетной линейкой, по которой можно находить приближенные частные, произведения и обратные величины.

Решение этого вопроса требует экспериментальной проверки



## МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ

Принятая ныне система обучения алгебре основана преимущественно на аналитических упражнениях, под которыми мы разумеем все виды упражнений по решению готовых задач, уравнений, неравенств и преобразованию различных выражений.

Как было сказано в первой части книги, важным средством повышения качества знаний, активизации мыслительных процессов является сочетание аналитических упражнений традиционного курса алгебры с синтетическими (куда входит конструирование учащимися выражений, задач, аналогичных решенным).

В тесной связи с применением синтетических упражнений мы рассматриваем вопросы обучения школьников приемам проверки, контроля решения.

Ограничиваясь в основном материалом курса алгебры восьмилетней школы, в отдельных случаях мы кратко указываем на возможность применения описанных приемов в старших классах.

Чтобы облегчить читателю понимание единства методического подхода к сходным по структуре темам, материал этой части книги распределен по следующим главам:

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.
2. Линейные функции, уравнения, неравенства.
3. Квадратные функции, уравнения, неравенства.
4. Задачи в курсе алгебры.

### ГЛАВА I.

#### ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

##### 1. ОДНОВРЕМЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ОДНОЧЛЕНОВ И МНОГОЧЛЕНОВ

Сначала приведем краткое описание урока, посвященного одновременному изучению указанных вопросов.

Эти два вопроса изучаются обычно на разных уроках.



При этом в сборнике задач по алгебре П. А. Тархова дано в 10 раз больше упражнений на первое преобразование, чем на обратное ему.

При этом упражнения на раскрытие скобок сформулированы кратко (раскрыть скобки в выражении  $2a - (b - c + 2)$ ), а краткой формы задания упражнений на заключение в скобки нет.

Недостаточная отработка навыков в раскрытии скобок приводит к большому количеству ошибок учащихся при изучении разложения на множители способом группировки и вынесением за скобки.

Указанных недостатков можно избежать при одновременном изучении этих преобразований.

После того как учитель объяснил правило раскрытия скобок, когда перед скобками стоит знак «плюс»:

$$3a + (b - c + 2) = 3a + b - c + 2,$$

ученикам предлагается решить обращенный пример с теми же числами:  $3a + (\dots\dots\dots) = 3a + b - c + 2$ .

Решение этого примера служит переходом к обратному преобразованию — заключению в скобки.

Далее учитель разъясняет структуру нового примера, указывая, что в последнем примере скобки были даны в левой части равенства, а в алгебре приходится иногда некоторые члены выражения специально заключать в скобки.

Решить следующий пример:

$$2x + 3y - z + 1 = 2x + (\dots\dots\dots).$$

Здесь нужно заключить в скобки последние три члена.

Анализируя решение двух взаимно обратных примеров, приходят к «двойному» правилу:

Для того чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «плюс», достаточно выписать из скобок все члены выражения с их знаками.

Для того чтобы заключить выражение в скобки, перед которыми стоит знак «плюс», достаточно записать внутри скобок все члены выражения с их знаками.

Далее также параллельно рассматриваются упражнения на раскрытие скобок и заключение в скобки в тех случаях, когда перед скобками находится знак «минус»:

$$3a - (2b - c + 2) =$$

$$3a - (\dots\dots\dots) = 3a - 2b + c - 2$$

$$x - y + 2 = x - (\dots\dots\dots)$$

$$x - y + 2 = x + (\dots\dots\dots)$$



Ученики самостоятельно формулируют второе «двойное» правило, которое отличается от приведенного выше лишь тем, что вместо слова «плюс» используется слово «минус», а оборот с «их знаками» заменяется оборотом «с противоположными знаками».

Некоторые примеры на заключение в скобки решаются с проверкой раскрытием скобок.

Урок завершается решением примеров на обе операции:

$$a + (b - 4c + 3) =$$

$$a + 3b + 2c - d = a + 3b + ( \dots )$$

$$a + 3b + 2c - d = a + 3b - ( \dots )$$

$$5x - (y - 2) =$$

$$5x - 2y + 4 = 5x - ( \dots )$$

$$5x - 2y + 4 = 5x + ( \dots ) \text{ и т. п.}$$

При проверке знаний надо требовать, чтобы ученик на каждое правило приводил свои примеры; при этом важно добиться того, чтобы отвечающий рассказывал оба правила.

При рассматриваемой системе обучения раскрытие скобок и заключение в скобки предшествует сложению и вычитанию одночленов и многочленов.

Оказалось удобным сложение и вычитание многочленов сводить к раскрытию скобок.

Соответствующее правило выглядит так:

Чтобы  $\frac{\text{прибавить}}{\text{вычесть}}$  одночлен или многочлен, надо приписать его

в скобках к исходному выражению со знаком  $\frac{\text{«плюс» (+)}}{\text{«минус» (-)}}$  перед этими скобками и потом раскрыть скобки и привести подобные члены.

Приведем примеры.

К многочлену  $2a - b$  прибавить многочлен  $a - 3b$ .

Решение.  $2a - b + (a - 3b) = 2a - b + a - 3b =$   
 $= 3a - 4b.$

От многочлена  $2x - 3y + 4$  отнять многочлен  $4x - 6y + 3$ .

Решение.

$$2x - 3y + 4 - (4x - 6y + 3) = 2x - 3y + 4 - 4x + 6y -$$
  
 $- 3 = -2x + 3y + 1.$

Можно тут указать на аналогию между вычитанием рационального числа и вычитанием многочлена.

Чтобы вычесть рациональное число, достаточно прибавить противоположное ему число:

$$A - (+3) = A + (-3) = A - 3;$$

$$A - (-4) = A + (+4) = A + 4.$$

Чтобы вычесть многочлен, достаточно прибавить противоположный ему многочлен:

$$A - (2a - b + 3) =$$

$$A + (-2a + b - 3) =$$

$$A - 2a + b - 3.$$



При изучении действий над расположенными многочленами интересно для учащихся решать деформированные примеры, например:

$$\begin{array}{r} + \quad 3a + ? - 4c + 5 \\ \quad ? - 6b + ? - ? \\ \hline 19a - 8b + c - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \quad 2y + ? - 4 \\ \quad ? - 3x + ? \\ \hline 7y - 5x + 3 \end{array}$$

Как известно, дальнейшее развертывание тождественных преобразований включает в себя следующие вопросы: умножение и деление одночленов и многочленов, разложение на множители, действия над алгебраическими дробями.

В традиционной системе обучения эти вопросы изучались в разных классах: умножение и деление одночленов и многочленов — в VI классе, разложение на множители и действия над алгебраическими дробями — в VII классе.

Одно время, как это ни странно, программа предусматривала умножение одночленов учить в VI классе, а деление одночленов в VII классе.

Анализ проблемы, изложенной в первой части данной работы, и многолетняя проверка показали преимущества изучения данного раздела по следующим подтемам (циклам):

1. Одночлены.
2. Одночлены и многочлены.
3. Многочлены.
4. Сокращенные действия по формулам.

При этом внутри каждого цикла рассматриваются все возможные операции: как действия над целыми выражениями, так и над дробными.

Циклы эти по виду связей между выражениями совершенно аналогичны друг другу; каждый цикл обладает внутренней полнотой преобразований.

Достижимая при этом прочность знаний учащихся имеет причиной, мы бы сказали, функционирование внутренних обратных связей в процессах мышления (обратные же связи между суждениями возникают лишь тогда, когда касаются контрастных, обратимых друг в друга преобразований и их результатов).

Дальше мы кратко излагаем методику изучения указанных подтем, причем для удобства читателей язык изложения максимально приближен к языку школьных учебников.

## 2. ИЗУЧЕНИЕ ПОДТЕМЫ «ОДНОЧЛЕНЫ»

Нельзя не приветствовать в данной связи соединения взаимно обратных операций умножения и разложения на множители по новым программам в одну тему.



В новых программах говорится: «Алгебра рациональных одночленов обладает известной законченностью...» («Математика в школе», 1968, № 2, стр. 10).

Остается лишь отметить, что этот тезис обладает значительно большей общностью, а именно:

1) В алгебру одночленов надобно включить и действия над дробями, знаменателем и числителем которых являются одночлены.

2) Такой логической законченностью обладают и указанные выше подтемы. Соединение программой в одну тему противоположных операций — это всего лишь полдела: дабы воспользоваться в полной мере дидактическими преимуществами метода противопоставления, совершенно необходимо изучать и эти, и подобные им вопросы на одном уроке.

Так называемое отсроченное противопоставление (контрастные вопросы, входящие в одну тему, изучаются на разных уроках, пусть и непосредственно следующих друг за другом) мало чем отличается от традиционной системы раздельного изучения таких взаимосвязанных вопросов.

Приведем описание одного урока.

Для одновременного изучения указанных действий учитель делит доску на две половины. (Ученики также проводят черту по середине страницы своей тетради.)

П р и м е р.

$$2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5;$$

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{2+3}.$$

Проверка: л. ч. :  $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$ ;

п. ч. :  $2^5 = 32$ ;

л. ч. равна п. ч.

Решается первый пример с буквенным основанием:

$$b^7 \cdot b^3 = b^{7+3} = b^{10}.$$

На основе правила нахождения неизвестного сомножителя учитель предлагает решить пример  $b^{10} : b^7$ , причем ответ записывается сразу, но с пропуском места посередине строки:

$$b^{10} : b^7 = \dots\dots\dots = b^3.$$

У ч и т е л ь. Вы сказали сразу ответ на основании зависимости между компонентами. А как можно было вычислить показатель частного? (От 10 отнять 7.)

Строка заполняется, и запись приобретает форму:

$$b^{10} : b^7 = b^{10-7} = b^3.$$

Тут же этот пример записывается в форме сокращения дроби:

$$\frac{b^{10}}{b^7} = \frac{b^7 \cdot b^3}{b^7} = \frac{b^3}{1} = b^3.$$



В дальнейшем важно при работе с записью деления в виде дроби, а противоположными операциями в алгебре считать не умножение и деление, а умножение и разложение на множители.

Следующий пример предлагается сначала на деление и записывается в правой половине страницы:

$$\frac{x^7}{x^2} = \frac{x^5 \cdot x^2}{x^2} = x^5.$$

Учитель предлагает проверить деление умножением и записать обратное действие слева на той же строке:

$$x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7.$$

$$\frac{x^7}{x^2} = x^5$$

Далее решается несколько пар примеров того же вида, причем первый пример дается то на умножение, то на деление, дабы затем преобразовать его в обратный.

Формулируется пара правил, причем сначала они записываются рядом в символической форме:

$$a^k \cdot a^p = a^{k+p}.$$

$$b^x : b^y = b^{x-y}.$$

Также с использованием противопоставления изучаются умножение и деление одночлена на одночлен:

$$K a^m b^k P a^n = K \cdot P a^{m+n} b^k.$$

$$\frac{M a^x b^p}{a^y} = M a^{x-y} b^p.$$

Большинство примеров предлагается на разные действия, не парные. Лишь решения некоторых примеров сопровождаются проверкой обратным действием, причем большей частью она осуществляется устно, но с подробными объяснениями.

Пример.

$$\frac{-100x^4y^6}{-4xy^6} = 25x^3;$$

$$(-100x^4y^6) : (-4xy^6) = 25x^3.$$

$$\text{Проверка. } (-4xy^6) 25x^3 = -4 \cdot 25x^3y^6 = -100x^4y^6$$

На этом же уроке и последующих наряду с решением обычных примеров даются деформированные примеры вида:

$$a^5 a^? = a^7; ? \cdot x^2 = x^6; \frac{b^7}{?} = b^4; \frac{?}{a} = a^3;$$

$$? \cdot (-3xy) = 18x^3y; \frac{14x^3y^2}{?} = 2xy^2.$$

Предлагаются также примеры на разложение одночлена на множители такого вида<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Как это ни удивительно, по традиции разложение одночлена на множители (по той, вероятно, причине, что эта операция неопределенная) не рассматривается в школе, хотя она незримо участвует в вынесении за скобки и т. п. Ошибки учащихся при изучении последней темы объясняются именно данным обстоятельством



$$12k^3p^2 = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \dots$$

$$12k^3p^2 = 3 \cdot \square \cdot \square = 2 \cdot \square \cdot \square = \dots$$

Полезны для решения на последующих уроках также упражнения в разложении на множители:

а. Представить число  $12k^3p^2$  в виде удвоенного произведения одного числа на другое.

Или: дано равенство  $12k^3p^2 = 2xy$ . Найти различные значения  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие равенству.

б. Представить число  $36a^4b^6$  в виде утроенного произведения квадрата одного числа на другое.

Или: дано равенство  $36a^4b^6 = 3x^2y$ . Найти различные значения  $x$  и  $y$ .

На дом дается задание на придумывание двух примеров (по одному на каждое действие, с последующей проверкой решения их обратным действием).

К концу следующего урока, посвященного закреплению материала, мы давали самостоятельную работу в двух вариантах.

Приведем текст одного из них.

1. Придумать и решить один пример на деление. Решение проверить.

2.  $(-2x^4y^2) \cdot (2x^3) =$

3.  $6a^2 \cdot \square = 12a^5$ .

4.  $\frac{45k^3p^2x}{15k^2x} =$

5.  $\frac{60x^3y}{?} = -4$ .

6.  $80x^4y^6 = 2 \cdot \square \cdot \square$ .

7.  $80x^4y^6 = 8 \cdot \square \cdot \square$ .

Последние два примера должны иметь разные решения.

Мы выше изложили методику одновременного рассмотрения двух действий умножения и деления одночленов.

Удобно и выгодно включить в изучение действий второй ступени над одночленами также и действия над алгебраическими дробями.

Опыт учителей, проводивших эксперимент, показал, что такая мера приносит даже при самых неблагоприятных условиях (отсутствии соответствующих учебников) до 20% экономии суммарного учебного времени, отведенного на три темы: «Действия над многочленами и одночленами», «Разложение на множители», «Алгебраические дроби».

Вернемся к вопросу о методике изучения операций над дробями в теме «Одночлены».



При условии раннего использования дробной черты (как знака деления) деление одночленов легко понимается как частный случай сокращения алгебраических дробей:

$$\frac{3a^2}{6a^3b} = \frac{1 \cdot 3a^2}{3a^2 \cdot 2ab} = \frac{1}{2ab}.$$

Далее решаются следующие примеры:

$$\frac{3a}{4b^2} \cdot \frac{2ab}{5}; \quad \frac{3a}{4b^2} : \frac{5a^2}{6b^3} \text{ и т. п.}$$

Сложение и вычитание дробей с соответствующими несложными членами изучается в конце данной подтемы после умножения и деления дробей.

Методика их изучения строится по аналогии с методикой изучения тех же действий с обыкновенными дробями:

$$\frac{45}{104} + \frac{311}{144} = \frac{20 + 33}{432} = \frac{53}{432};$$

$$\frac{5b^2}{12a^2b} + \frac{3a}{20ab^3} = \frac{25b^2 + 9a}{60a^2b^3}.$$

В качестве возможного образца к следующим подтемам приведем здесь подробный набор соответствующих упражнений при такой системе «распределенного» изучения действий над дробями.

1. Решен следующий пример на сложение алгебраических дробей:

$$\frac{2x}{4x} + \frac{5}{8x^2} = \frac{4x + 5}{8x^2}; \quad OK(8x^2; 4x) = 8x^2.$$

Проверить тождество

$$\frac{2}{4x} + \frac{5}{8x^2} = \frac{4x + 5}{8x^2} \text{ при } x_1 = -2, x_2 = -4, x_3 = 5.$$

2. Решен следующий пример на вычитание дробей:

$$\frac{7}{10a^3b} - \frac{5}{6ab^3} = \frac{21b^2 - 25a^2}{30a^2b^3};$$

$$OK(10a^3b, 6ab^3) = 30a^3b^3.$$

Проверить тождество

$$\frac{7}{10a^3b} - \frac{5}{6ab^3} = \frac{21b^2 - 25a^2}{30a^3b^3}$$

$$\text{при } a_1 = 1, a_2 = 2;$$

$$b_1 = 1, b_2 = 0.$$

Почему во втором случае тождество не имеет смысла?



3. Выполнить действия:

$$1) \frac{3}{x} - \frac{4}{xy};$$

$$2) \frac{3}{2x} + \frac{4}{5xy};$$

$$3) \frac{k}{ab} - \frac{5}{ac};$$

$$4) \frac{2k}{3ab} + \frac{5}{4ac};$$

$$5) \frac{a}{a^2c} - \frac{4}{b^2c};$$

$$6) \frac{3c}{2b^2} + \frac{5b^2}{3c};$$

$$7) \frac{4a}{x^2} + \frac{6}{x};$$

$$8) \frac{3a}{8x^2} - \frac{6}{6x};$$

4. Дописать пропущенные числа в следующих примерах на сложение и вычитание дробей и решить примеры:

$$1) \frac{7}{?} + \frac{?}{15} = \frac{3 \cdot 7 - ? \cdot ?}{30}; OK(? , 15) = 30;$$

$$2) \frac{3k^2}{?} + \frac{?}{6k} = \frac{? + 25p^2}{30kp^2}; OK(? , 6k) = 30kp^2;$$

$$3) \frac{4a}{7b} - \frac{b}{?} = \frac{? - ?}{14ab}; OK(7b, ?) = 14ab.$$

5. Решить уравнения относительно буквы  $y$  и проверить полученный корень:

$$1) \frac{5}{2b} - y = \frac{7}{6a};$$

$$2) y + \frac{7k}{10} = \frac{5k}{12};$$

$$3) y - \frac{b}{2c} = \frac{5b}{7c};$$

6. Решить пример:

$$\frac{4}{7k^2} + \frac{2}{5k^2} =$$

решить уравнение:

$$\frac{4}{7k^2} + x = \frac{34}{35k^2}.$$

Какой корень должен получиться?  
Правильно ли вы решили уравнение?

7. Решить примеры:

$$1) \frac{2a}{1} + \frac{3}{a^2}; \quad 2) \frac{7b}{4a^3} - \frac{a^2}{1};$$

$$3) \left( \frac{7}{xy^2} - \frac{2}{x^2y} + \frac{5}{xy} \right) : \frac{1}{x^3y^4};$$

$$4) \left( \frac{2b}{15a} - \frac{3a}{5b} + \frac{4a}{3c} \right) : \frac{1}{3Ca^2b^3c};$$



Сделаем одно замечание. Мы здесь излагаем метод сокращения дробей.

рациональные выражения. В такой системе, когда целые и  
выступают частным случаем дробей.

Осуществляя такую методику, надобно помнить о необходимости  
быстрейшего перехода к действиям над рациональными выра-  
жениями (алгебраическими дробями), не отработывая до автома-  
тизма навыков оперирования целыми выражениями, как это име-  
ет место в традиционной системе обучения.

Поясним сказанное: сокращение дроби

$$\frac{2ab}{6a^3x} = \frac{2ab}{2a \cdot 3a^2x} = \frac{b}{3a^2x}$$

включает в себя и операции над одночленами; поэтому, обучая  
сокращению дробей, мы одновременно закрепляем действия над  
целыми выражениями.

Сказанное имеет отношение и к методике изучения последующих  
вопросов.

### 3. ИЗУЧЕНИЕ ПОДТЕМЫ «ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ»

(Одновременное изучение умножения многочлена на одночлен  
и разложения многочлена на множители вынесением общего мно-  
жителя за скобки.)

Вначале вспоминаем с учащимися распределительный закон  
умножения.

Пусть требуется умножить число 2 на 234.

Запись располагаем так:

1. Требуется умножить одно-  $2 \cdot 234 =$   
значное число 2 на многознач-  
ное число 234.

2. Разложим множитель по  $= 2 \cdot (200 + 30 + 4) = 2 \cdot 200 +$   
разрядам.

3. Число 2 умножим на каж-  $+ 2 \cdot 30 + 2 \cdot 4 =$   
дое из слагаемых.

4. Сложим полученные про-  $= 400 + 60 + 8 = 468.$   
изведения.

Далее рассматриваем умножение многочлена на одночлен ( $3x^2 -$   
 $- 2xy + 5) \cdot 4x^2$  или — что предпочтительнее — одночлена на  
многочлен:  $4x^2(3x^2 - 2xy + 5)$ .

При обратном преобразовании (т. е. при разложении много-  
члена на множители) «вынесенный» общий множитель записывает-  
ся перед скобками; поэтому целесообразно чаще решать примеры  
на умножение во второй из приведенных записей.

На одном-двух уроках изучается умножение одночлена на мно-  
гочлен; преобразованные выражения записываются друг под  
другом:



1. Требуется умножить одночлен  $4x^2$  на многочлен  $3x^2 - 2xy + 5$ .

2. Умножим одночлен на каждый член множителя.

3. Полученные произведения сложим.

$$\begin{aligned} 4x^2 \cdot (3x^2 - 2xy + 5) &= \\ &= 4x^2 \cdot 3x^2 - 4x^2 \cdot 2xy + \\ &+ 4x^2 \cdot 5 = 12x^4 - 8x^3y + \\ &+ 20x^2. \end{aligned}$$

Сразу же на первом уроке надо предложить деформированные упражнения, в которых требуется восстановить предыдущие или последующие выражения на основе известных элементов; при этом упражнения удобно располагать в двух параллельных рядах.

$$\begin{aligned} 4x^2 \cdot (3x^2 - 2xy + 5) &= \\ &= 4x^2 \cdot 3x^2 - 4x^2 \cdot 2xy + \\ &+ 4x^2 \cdot 5 = 12x^4 - 8x^3y + \\ &+ 20x^2 \end{aligned}$$

$$3b \cdot (2a - b + 1) =$$

$$\begin{aligned} ? \cdot (? - ? + ?) &= \\ 2a \cdot 5p - 2a \cdot 4k + 2a \cdot 3 &= \\ ? \cdot (...) = ? \cdot ? + ? \cdot ? - ? \cdot ? &= \\ = 6xp + 2y^2 - 3y \end{aligned}$$

Предлагаются также упражнения по восстановлению отдельных элементов тождественного преобразования, расположенных в обеих частях равенства:

$$? (2 + ? - 3) = 10a^2b + 15bc - ?$$

Вначале для облегчения понимания последовательности и направления преобразований следует использовать знаки вопроса, несущие информацию о числе слагаемых, о выносимом множителе, о месте, занимаемом в выражении, и т. п.

В этих примерах преобразование сверху вниз является умножением, а преобразование снизу вверх — разложением на множители.

Далее рассматривается разложение на множители особо, т. е. в обычной записи сверху вниз.

Рассмотрим следующие записи, выражающие различные формы связи между тремя числами.

Умножение (верхняя строка):

Разложение на множители (нижняя строка):

$$\begin{array}{ccc|ccc} 5 \cdot 8 = 40; & a^2 \cdot a = a^3; & & 3x \cdot 4x^3 = 12x^4. & & \\ 40 = 5 \cdot 8; & a^3 = a^2 \cdot a; & & 12x^4 = 3x \cdot 4x^3. & & \end{array}$$

Мы видим, что умножение и разложение на множители являются взаимно обратными действиями; одно из них проверяется посредством другого действия.

Пусть мы вычислили произведение одночлена на многочлен (или многочлена на одночлен). Поменяем местами левую и правую части тождества.

$$\begin{aligned} 4k (3k^2 - 2k + 1) &= \\ &= 12k^3 - 8k^2 + 4k; \\ 12k^3 - 8k^2 + 4k &= 4k (3k^2 - \\ &- 2k + 1). \end{aligned}$$



Многочлен  $12k^3 - 8k^2 + 4k$  разложен на два множителя: на одночлен  $4k$  и трехчлен  $3k^2 - 2k + 1$ .

Далее рассмотрим методику решения примеров, связанных с умножением и разложением на множители.

Пример 1.

Разложим на множители следующий многочлен:

$$8a^5 - 6a^3 =$$

Все члены многочлена можно разделить на число  $2a^3$ :

$$\begin{cases} 1) 8a^5 : (2a^3) = 4a^2; \\ 2) -6a^3 : (2a^3) = -3. \end{cases}$$

Вынесем этот общий делитель (или общий «множитель») за скобки, а внутри скобок оставим частные от деления каждого члена на число  $2a^3$ , получим:

$$2a^3(4a^2 - 3).$$

Итак, мы получим следующее разложение на множители:

$$8a^5 - 6a^3 = 2a^3(4a^2 - 3).$$

Чтобы проверить ответ, надо в уме раскрыть скобки (т. е. перемножить множители в правой части тождества):

$$2a^3(4a^2 - 3) = 2a^3 \cdot 4a^2 - 2a^3 \cdot 3 = 8a^5 - 6a^3.$$

Полученное произведение равно разлагаемому выражению. Значит, разложение на множители произведено правильно. Связь между тремя выражениями  $2a^3$ ;  $(4a^2 - 3)$ ;  $(8a^5 - 6a^3)$  можно выразить четырьмя способами:

1. Умножение многочлена на одночлен:

$$(4a^2 - 3) \cdot 2a^3 = 8a^5 - 6a^3.$$

2. Умножение одночлена на многочлен:

$$2a^3 \cdot (4a^2 - 3) = 8a^5 - 6a^3.$$

3. Деление многочлена на одночлен или сокращение дроби на одночлен:

$$\frac{8a^5 - 6a^3}{2a^3} = \frac{2a^3(4a^2 - 3)}{2a^3} = 4a^2 - 3.$$

4. Деление многочлена на многочлен или сокращение дроби на многочлен:

$$\frac{8a^5 - 6a^3}{4a^2 - 3} = \frac{2a^3(4a^2 - 3)}{4a^2 - 3} = 2a^3.$$

Пример на разложение на множители обычно можно решить несколькими способами, например:

$$8a^5 - 6a^3 = 2a^3(4a^2 - 3);$$

$$8a^5 - 6a^3 = 2(4a^5 - 3a^3);$$

$$8a^5 - 6a^3 = a^3(8a^2 - 6a) \text{ и т. д.}$$



Все эти разложения правильные; однако при решении алгебраических примеров на разложение на множители надо выносить за скобки степени с наивысшим показателем и наибольшим общим делителем коэффициентов:

$$8a^5 - 6a^3 = 2a^3(4a^2 - 3).$$

В этом случае члены, заключенные внутри скобки ( $4a^2$  и  $-3$ ), уже не имеют общего множителя.

**Пример 2.** Разложим на множители следующий многочлен:  
 $8x^2y^2 - 6x^2y + 2xy^2 - 4x^2 + 2x = 2x(4xy^2 - 3xy + y^2 - 2x + 1).$

Разлагаемый на множители многочлен состоит из пяти одночленов; соответственно множитель, записанный в скобках, должен иметь столько же (пять) членов.

Научившись разлагать многочлены на множители, можно решать примеры на деление или сокращение алгебраических дробей.

**Пример 3.**

$$(6a^3 - 8a^2 + 4a) : (2a) = \frac{6a^3 - 8a^2 + 4a}{2a} = \frac{2a(3a^2 - 4a + 2)}{2a} = 3a^2 - 4a + 2.$$

Здесь мы в числителе вынесли за скобки множитель  $2a$  и сократили затем оба члена на одночлен  $2a$ .

**Пример 4.**

$$\frac{2k - 1}{6k^2 - 3k} = \frac{2k - 1}{3k(2k - 1)} = \frac{1}{3k}.$$

Дробь сократили на многочлен  $2k - 1$ .

Особое внимание надо обратить на те случаи сокращения дроби, когда в состав числителя и знаменателя входят противоположные многочлены.

**Пример 5.**

Пусть требуется сократить дробь

$$\frac{5x^2 - 6xy}{6xy - 5x^2}.$$

Члены дроби представляют противоположные многочлены.

Чтобы получить общий множитель, надо изменить знаки на противоположные в двух местах: перед дробью и в знаменателе:

$$\frac{5x^2 - 6xy}{6xy - 5x^2} = - \frac{5x^2 - 6xy}{-(6xy - 5x^2)} = - \frac{5x^2 - 6xy}{-6xy + 5x^2} = - \frac{5x^2 - 6xy}{5x^2 - 6xy} = -1.$$

Примеры подобного вида можно было бы решить путем вынесения за скобки  $(-1)$  в числителе или в знаменателе дроби.

а) Вынесем за скобки  $(-1)$ , в числителе дроби получим:

$$\frac{5x^2 - 6xy}{6xy - 5x^2} = \frac{-1(-5x^2 + 6xy)}{6xy - 5x^2} = \frac{-1(6xy - 5x^2)}{6xy - 5x^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$



б) Вынесем за скобки  $(-1)$ , в знаменателе дроби будем иметь:

$$\frac{5x^2 - 6xy}{6xy - 5x^2} = \frac{5x^2 - 6xy}{-1(-6xy + 5x^2)} = \frac{5x^2 - 6xy}{-1(5x^2 - 6xy)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Пример 6.

$$\frac{3a^2 - 6ab}{10b^2 - 5ab} = \frac{3a(a - 2b)}{5b(2b - a)} =$$

В числителе и знаменателе оказались противоположные множители  $(a - 2b)$  и  $(2b - a)$ ; чтобы величина дроби не изменилась, надо изменить знаки на противоположные в двух местах (перед дробью и в знаменателе).

Однако в знаменателе два множителя:  $5b$  и  $(2b - a)$ ; в этих случаях достаточно заменить знаки лишь в одном из множителей знаменателя.

Поэтому имеем дальше:

$$\frac{3a^2 - 6ab}{10a^2 - 5ab} = \frac{3a(a - 2b)}{5b(2b - a)} = \frac{-3a(a - 2b)}{5b(a - 2b)} = -\frac{3}{5b}.$$

Проверим правильность тождества

$$\frac{3a^2 - 6ab}{10b^2 - 5ab} = \frac{-3a}{5b}$$

при произвольных значениях  $a$  и  $b$ , например при  $a = 3$ ,  $b = -1$ .

$$\frac{3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot (-1)}{10(-1)^2 - 5 \cdot 3 \cdot (-1)} \quad \boxed{?} = \frac{3 \cdot 3}{5(-1)};$$

$$\frac{3 \cdot 9 - 6(-3)}{10 \cdot 1 - 5 \cdot (-3)} \quad \boxed{?} = \frac{3 \cdot 3}{-5};$$

$$\frac{27 + 18}{10 + 15} \quad \boxed{?} = \left(-\frac{9}{5}\right);$$

$$\frac{45}{25} \quad \boxed{?} = \frac{9}{5};$$

$$\frac{9}{5} = \frac{9}{5}.$$

Значит, сокращение дроби выполнено правильно.

По данной подтеме предлагаются те же виды упражнений, которые мы рассматривали выше в параграфе, посвященном одночленам.

Упражнения по данному разделу должны быть возможно более разнообразными, с тем чтобы обеспечить углубленное усвоение материала.

Приведем примеры таких упражнений.

1. Среди выражений, разлагающихся на множители, иногда намеренно включать неразложимые, например



- а)  $x^2 - 2xy - 3x$  (разлагается);  
 б)  $x^2 - 2y - 3x$  (не разлагается);  
 в)  $x^2 - 2y - 3xy$  (не разлагается).

2. Придумать одночлен и многочлен. Перемножить их. Полученное произведение разложить на множители вынесением общего множителя за скобки.

3. Придумать дроби, при сокращении которых получались бы следующие результаты:

$$\frac{?}{?} = \frac{a(a^2 - 2b)}{?(a^2 - 2b)} = \frac{a}{2b};$$

$$\frac{?}{?} = \frac{x(\quad)}{2y(x - y)} = \frac{x}{2y};$$

$$\frac{?}{?} = \frac{?(a - 3b)}{?(\quad)} = \frac{a}{b}.$$

Далее в этой подтеме решаются примеры на все действия с алгебраическими дробями, причем знаменатели могут разлагаться на множители вынесением общего множителя за скобки.

Примеры предлагаются такого вида:

$$\left( \frac{2x - 1}{3x^2 - 6x} - \frac{5}{x - 2} \right) : \frac{2}{5x - 10}.$$

#### 4. ИЗУЧЕНИЕ ПОДТЕМЫ «МНОГОЧЛЕНЫ»

(Одновременное изучение умножения многочлена на многочлен и разложение многочлена на множители группировкой).

Данная подтема изучается по тому же плану, что и предыдущая подтема «Одночлены и многочлены».

Вначале выводим правило умножения многочлена на многочлен.

1. Пусть требуется умножить  $(a + 2)$  на многочлен  $(x - y)$ .

2. Заменим первый сомножитель буквой  $M$ :

$$(a + 2) = M.$$

3. По правилу умножения одночлена на многочлен (раскрываем скобки).

4. Применим переместительный закон умножения к каждому произведению.

5. Заменим число  $M$  снова многочленом ( $M = a + 2$ ).

6. Раскроем скобки.

$$(a + 2)(x - y) =$$

$$= M(x - y) =$$

$$= Mx - My =$$

$$= xM - yM =$$

$$= x(a + 2) - y(a + 2) =$$

$$= xa + 2x - ya - 2y =$$



Опустив записи с вспомогательной буквой  $M$ , получаем следующую последовательность преобразований:

Умножение  
многочлена  
на многочлен.

$$\begin{aligned} & (a+2)(x-y) = \\ & = x(a+2) - y(a+2) \\ & = xa + 2x - \\ & - ya - 2y. \end{aligned}$$

Разложение много-  
члена на множители  
способом группо-  
вки.

Обратим внимание на то, что преобразования выполняются в вертикальном направлении, а полученные выражения записываются друг под другом.

Переход от выражения  $(a+2)(x-y)$  к выражению  $xa + 2x - ya - 2y$  есть умножение многочлена на мно-  
гочлен, переход в обратном направлении есть разложе-  
ние многочлена на множители способом  
группировки. Итак, мы приходим к следующему правилу:

*Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член второго многочлена умножить на первый многочлен и затем рас-  
крыть скобки.*

Данное правило в отличие от обычного акцентирует внима-  
ние на промежуточном преобразовании, т. е. на умножении перво-  
го многочлена как целого на каждый член второго.

Эта операция важна для перехода к обратному преобразованию —  
разложению многочлена на множители группировкой.

На первом же уроке по изучению умножения многочлена на  
многочлен следует предлагать несложные упражнения по восста-  
новлению пропущенных выражений на основе известного результа-  
та. (Эти упражнения являются завуалированными разложениями  
на множители способом группировки.) Такие упражнения удобно  
предлагать парами: слева — на умножение многочлена, а справа —  
на разложение группировкой.

В правом упражнении дается сначала средняя строка, например:

$$\begin{aligned} \text{I. } & (a+b)(k-p) = & 1. & ( \quad ) ( \quad ) = \\ & = k(a+b) - p(a+b) = & & = k(x+y) \dots = \\ & = ka + kb - pa - pb. & & = k(x+y) - 3(x+y) \dots \end{aligned}$$

Потом предлагаются еще более сложные упражнения, например:

$$\begin{aligned} \text{II. } & (e+6)(c-3) = & 2. & ( \quad ) ( \quad ) = \\ & = & & = ab + 5a - 2b - 10 \\ \text{III. } & (a^2 - 2a + 3)(b-1) = & 3. & ( \quad ) ( \quad ) = \\ & = & & ( \quad ) + ( \quad ) = ck^2 - 3ck + 2c + \\ & = & & + k^2 - 3k + 2 \end{aligned}$$

Впоследствии решаются особо примеры на разложение на мно-  
жители группировкой, причем запись разворачивается, как обы-  
чно, сверху вниз.

Рассмотрим о б ъ я с н е н и е решения нескольких примеров.



### Пример 1.

1. Пусть требуется разложить на множители многочлен.

2. Сгруппируем слагаемые в две группы, по два слагаемых в каждой, группы заключим в скобки.

Вместо четырех членов мы получили два члена, два слагаемых (две «группы»).

3. В каждой группе за скобки вынесем общий множитель...

4. Мы получили сумму двух произведений, которые имеют общий множитель — многочлен  $(a - b)$ ; этот многочлен вынесен за скобки.

Итак, нами получено следующее тождество:

$$xa - xb + 2a - 2b = (a - b)(x + 2).$$

Полезно иногда проверить полученное тождество раскрытием скобок в правой части, т. е. перемножением многочленов. Можно также изредка осуществить числовые подстановки, например: пусть  $a = 5$ ;  $b = -3$ ;  $x = 4$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5 - 4(-3) + 2 \cdot 5 - 2(-3) &= [5 - (-3)] \cdot (4 + 2); \\ 20 + 12 + 10 + 6 &= (5 + 3) \cdot 6; \\ 48 &= (5 + 3) \cdot 6; \\ 48 &= 48. \end{aligned}$$

### Пример 2.

1. Пусть требуется разложить на множители многочлен.

Мы видим, что если сгруппировать члены по два в том порядке, в каком они следуют в исходном выражении, то не окажется общего множителя внутри каждой группы.

2. Поэтому применим переместительный закон сложения и расположим попарно члены с общей буквой.

3. Сгруппируем члены по два. (Проверьте правильность заключения в скобки, устно раскрыв снова скобки.)

$$xa - xb + 2a - 2b =$$

$$= (xa - xb) + (2a - 2b) =$$

$$= x(a - b) + 2(a - b) =$$

$$= (a - b)(x + 2) =$$

$$= (a - b)(x + 2).$$

$$4ck + 3pe - 12cp - ek =$$

$$= 4ck - 12cp + 3pe - ek =$$

$$= (4ck - 12cp) + (3pe - ek) =$$



4. Разложим на множители каждую группу (каждые скобки), вынеся общий множитель за скобки.

5. Замечаем, что выражения в скобках являются многочленами, противоположными друг другу, и поэтому изменим знак дважды: перед вторыми скобками и перед всеми членами внутри вторых скобок.

6. Две группы имеют общий множитель  $(k - 3p)$ , который вынесем за скобки.

$$= 4c(k - 3p) + e(3p - k) =$$

$$= 4c(k - 3p) - e(-3p + k) =$$

$$= 4c(k - 3p) - e(k - 3p) =$$

$$= (k - 3p)(4c - e) =$$

$$= (k - 3p)(4c - e).$$

Итак, мы получили следующее разложение:

$$4ck + 3pe - 12cp - ek = (k - 3p)(4c - e).$$

Правильность разложения на множители можно проверить обратным преобразованием — умножением. Сравнивая полученное произведение  $4ck - 12cp - ek + 3pe$  с исходным выражением  $4ck + 3pe - 12cp - ek$ , мы видим, что они равны, так как отличаются лишь порядком слагаемых.

$$(k - 3p)(4c - e) =$$

$$= 4c(k - 3p) - e(k - 3p) =$$

$$= 4ck - 12cp - ek + 3pe.$$

Итак, разложение на множители выполнено правильно.

В системе упражнений по данной подтеме должны быть такие, которые рассчитаны на углубленное познание материала, а не только на однообразные преобразования.

Рассмотрим несколько видов таких упражнений.

1. Среди выражений, разлагающихся на множители, предложить неразложимые выражения:

- |                            |                   |
|----------------------------|-------------------|
| а) $3ux^2 - 3xu + x^2 - x$ | (разлагается);    |
| б) $k^2 - 2kp - 3k - 6p$   | (не разлагается); |
| в) $k^2 + 2kp + 3k - 6p$   | (не разлагается). |

2. Придумать два несложных многочлена, перемножить их. Полученное произведение разложить на множители группировкой.

3. Придумать два двучлена и один одночлен (например,  $a + b$ ;  $a^2 + ab$  и  $b$ ). Разложить полученное произведение на множители, применив вынесение за скобки и группировку.



4. Придумать дроби, числители и знаменатели которых были бы такими многочленами, чтобы после сокращения получились следующие результаты:

$$\frac{?}{?} = \frac{a \cdot (x - y)}{(2x - 1)(x - y)} = \frac{a}{2x - 1};$$

$$\frac{?}{?} = \frac{(k + 2)(?)}{3k \cdot (?)} = \frac{k + 2}{3k};$$

$$\frac{?}{?} = \frac{?(x + 2y)}{?(b + 2y)} = \frac{b - 1}{b + 2};$$

$$\frac{?}{?} = \frac{c + b}{c - b}.$$

Завершающим упражнением по этой теме является решение примеров на все действия над алгебраическими дробями.

Примеры подбираются так, чтобы знаменатели могли разлагаться на множители либо вынесением за скобки общего множителя, либо группировкой.

Можно взять примерно упражнения такого вида:

$$\frac{3}{2kp - 2k + p - 1} - \frac{2}{p^2 - p} \cdot \frac{kp - k}{4}.$$

## 5. СОКРАЩЕННЫЕ ДЕЙСТВИЯ ПО ФОРМУЛАМ

Тождественные преобразования завершаются сокращенными действиями по формулам. Здесь рассматриваются следующие выражения: разность квадратов, квадрат суммы и разности двух чисел, сумма и разность кубов, куб суммы и разности двух чисел. Вначале рассмотрим методику изучения возведения в степень.

### а) Возведение в степень одночленов

Пусть требуется возвести число  $2^4$  в квадрат:

$$(2^4)^2 = 2^4 \cdot 2^4 = 2^{4+4} = 2^8.$$

Проверка.

$$\begin{aligned} (2^4)^2 &? 2^8; \\ (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^2 &? 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2; \\ 16^2 &? 256; \\ 256 &= 256. \end{aligned}$$

Выведем правило возведения в степень в общем виде:

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$$



Чтобы возвести степень в степень, достаточно перемножить показатели и оставить то же основание:

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y} = b^{xy}; \quad (3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8.$$

Точно так же:

$$\begin{aligned} (2a^2)^3 &= 2a^2 \cdot 2a^2 \cdot 2a^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = 2^3 \cdot (a^2)^3 = 8a^6; \\ (3a^3x^2)^4 &= 3a^3x^2 \cdot 3a^3x^2 \cdot 3a^3x^2 \cdot 3a^3x^2 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = \\ &= 3^4 \cdot (a^3)^4 \cdot (x^2)^4 = 81a^{12}x^8. \end{aligned}$$

**П р а в и л о.** Чтобы возвести многочлен в степень, надо возвести в эту степень коэффициент и каждый буквенный множитель в отдельности, а затем полученные результаты перемножить.

**П р и м е р.**

$$(5x^4)^2 = (5)^2 \cdot (x^4)^2 = 25x^8.$$

**У п р а ж н е н и я**

1. Вычислить:

$$\begin{aligned} \text{а) } 3b^2 \cdot 3b^2 &= (3b^2)^2 = & \text{б) } (-2x^3) \cdot (-2x^3) \cdot (-2x^3) \times \\ & & \times (-2x^3) = (-2x^3)^4 = \end{aligned}$$

2. Восстановить пропущенные числа:

$$1) (2a)^3 = ?$$

$$7) \left(-\frac{1}{5}k^2p^3\right)^2 = ?$$

$$2) (?)^3 = 64a^6;$$

$$8) (?)^2 = \frac{16}{49}b^4c^2;$$

$$3) (5x^2)^3 = ?$$

$$9) \left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 = ?$$

$$4) (?)^3 = -125x^6;$$

$$10) \left(+\frac{2}{3}xy^2\right)^3 = ?$$

$$5) (0,5b^3c)^3 = ?$$

$$11) (+?)^2 = 81a^6;$$

$$6) (?)^2 = \frac{1}{49}x^6y^2;$$

$$12) (-?)^2 = 81a^6.$$

3. Восстановить пропущенные числа:

$$1) (+?)^2 = 64x^6;$$

$$7) (+?)^2 = y^{12};$$

$$2) (-?)^2 = +64x^6;$$

$$8) (-?)^2 = y^{12};$$

$$3) (?)^3 = 64x^6;$$

$$9) (?)^3 = y^{12};$$

$$4) (2a^2)^? = 16a^4;$$

$$10) (?)^? = -y^{12};$$

$$5) (-5b^2)^? = 125b^6;$$

$$11) (-?)^? = y^{12};$$

$$6) (?)^? = 27c^{12};$$

$$12) (?)^? = y^{12}.$$

б) Разность квадратов двух чисел  $(a^2 - b^2)$

В качестве образца подробно рассмотрим методику одновременного изучения сокращенного умножения суммы двух чисел на



их разность и обратной операции — разложения на множители разности квадратов двух чисел.

Сначала вводится понятие разности двух квадратов (разность квадратов).

Устно выполняется несколько упражнений вида:

$$(3c)^2 = \quad ; \quad ( \quad )^2 = 16^4 \text{ и т. д.}$$

Даны два числа:  $5x$  и  $2y^2$ .

Учитель предлагает найти сумму этих чисел  $(5x + 2y^2)$ , разность этих чисел  $(5x - 2y^2)$ , квадраты этих чисел  $(5x)^2 = 25x^2$ ,  $(2y^2)^2 = 4y^4$  и, наконец, разность квадратов этих чисел  $(25x^2 - 4y^4)$ .

Затем дается числовой пример:

$3 \cdot 5 = 15$	15 разлагается на два множителя 3 и 5.
Произведение 3 и 5 равно 15.	

Выясняется, что пример на умножение всегда можно прочесть в двух направлениях так, как это показано выше.

Далее вычислим произведение разности двух чисел  $(x - y)$  на сумму этих же чисел  $(x + y)$ :

$$(x - y) \cdot (x + y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2.$$

Мы получили следующее тождество:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Читая это тождество слева направо, получаем правило сокращенного умножения:

*Произведение разности двух чисел на их сумму равно разности квадратов этих же чисел:*

$$(x - y) \cdot (x + y) = x^2 - y^2.$$

Читая данное тождество справа налево, имеем правило разложения на множители разности квадратов:

*Разность квадратов двух чисел разлагается на два множителя: на разность оснований и на сумму оснований:*

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Такое разложение на множители называют разложением по формуле разности квадратов.

Связь между данными выражениями можно записать четырьмя способами:

1. Сокращенное умножение суммы двух чисел на их разность.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$



2. Разложение на множители разности квадратов двух чисел.

3. Сокращенное деление по формуле.

4. Сокращение алгебраической дроби.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

$$(x^2 - y^2) : (x - y) = (x + y).$$

$$(x^2 - y^2) : (x + y) = (x - y).$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y)}{x - y} =$$

$$= (x + y);$$

$$\frac{x + y}{x^2 - y^2} = \frac{x + y}{(x + y)(x - y)} =$$

$$= \frac{1}{x - y}.$$

Данные правила верны для любых оснований. Возьмем, например, вместо  $x$  одночлен  $3a^2$ , а вместо  $y$  — число 5. Тогда должно получиться согласно правилу:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2;$$
$$(3a^2 - 5)(3a^2 + 5) = (3a^2)^2 - 5^2 = 9a^4 - 25.$$

$$\text{Или: } (3a^2 - 5)(3a^2 + 5) = 9a^4 - 25;$$

$$\text{и наоборот: } 9a^4 - 25 = (3a^2 - 5)(3a^2 + 5).$$

Проверим этот вывод подробным перемножением полученных множителей:

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 5 \\ 3a^2 + 5 \\ \hline 9a^4 - 15a^2 \\ + 15a^2 - 25 \\ \hline 9a^4 - 25 \end{array}$$

### У п р а ж н е н и я

1. Выполнить сокращенное умножение:

$$1) (x^2 - 3y)(x^2 + 3y) = (x^2)^2 - (3y)^2 = \dots$$

$$2) (1 + 0,6a^3)(1 - 0,6a^3) = (1)^2 - (?)^2 = \dots$$

$$3) \left(\frac{3}{7} - 0,8ab\right)\left(\frac{3}{7} + 0,8ab\right) = (?)^2 - (?)^2 = \dots$$

$$4) (5k + 2p)(5k - 2p) = (?)^2 - (?)^2 = \dots$$

2. Восстановить пропущенные выражения в примерах на сокращенное умножение:

$$1) (?) - (?) \cdot (?) + (?) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2;$$

$$2) (?) - (?) \cdot (?) + (?) = (?)^2 - (?)^2 = 225 - 16a^4;$$

$$3) (?) + 9 \cdot (?) - (?) = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - (9)^2 = ? - ?;$$

$$4) (?) - (?) \cdot (?) + (?) = (?)^2 - (?)^2 = 169 - 49x^6;$$

$$5) (?) + (?) \cdot (2x^2 - ?) = (2x^2)^2 - (?)^2 = ? - 9y^6;$$

$$6) (3 + ?) \cdot (?) - 4k = (?)^2 - (?)^2 = ? - ?.$$



3. Выполнить сокращенное умножение и проверить ответ подробным умножением:

1)  $(a - 4)(a + 4) = a^2 - 16$ .

Проверка.

$(a - 4)(a + 4) = a^2 - 4a + 4a - 16 = a^2 - 16$ .

2)  $(x - 6)(x + 6) =$

3)  $(2a^2 - 5b^3)(2a^2 + 5b^3) =$

4)  $\left(\frac{1}{3}x^2 + 0,7\right)\left(\frac{1}{3}x^2 - 0,7\right) =$

5)  $(a^3bc - 1)(a^3bc + 1) =$

4. а) Выполнить сокращенное умножение:

$(x + y)(x - y) =$

б) Заменить букву  $x$  одночленом  $3a^2$ , а букву  $y$  — одночленом  $2b^3$  и также выполнить сокращенное умножение.

5. Выполнить умножение чисел, представив их как разность и сумму одних и тех же чисел; восстановить пропущенные числа:

1)  $98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996$ .

2)  $998 \cdot 1002 = (?) - 2) \cdot (?) + 2) = \dots$

3)  $(?) (?) = (500 - 1)(500 + 1) = \dots$

4)  $\left(99\frac{14}{15} \cdot 100\frac{1}{15}\right) = (?) + ?)(?) - ?) = \dots$

5)  $(?) \cdot (?) = \left(70 - \frac{1}{9}\right)\left(70 + \frac{1}{9}\right) = \dots$

6)  $(?) \cdot (?) = (?) - ?) = 800^2 - 1^2 = 640\,000 - 1 = 639\,999$ .

7)  $(?) \cdot (?) = (?) - ?) \cdot (?) + ?) = (?)^2 - (?)^2 = ? - 4 = 4896$ .

8)  $(?) \cdot (?) = (?) - ?) \cdot (?) + ?) = (?)^2 - (?)^2 = ? - \frac{1}{4} = 9999\frac{3}{4}$ .

6. Восстановить пропущенные числа:

1)  $(3k - ?)(? + 4p) = 9k^2 - 16p^2$ ;

2)  $(? - 5)(6x + ?) = ? - ?$ ;

3)  $(1 - ?)(? - ?) = ? - 121x^4$ ;

4)  $(? - ?)(? - 3x^2) = 144 - ?$ .

7. Разложить разность квадратов на множители. Восстановить пропущенные числа:

1)  $9k^2 - 16 = (3k)^2 - (4)^2 = (3k - 4)(3k + 4)$ ;

2)  $25p^4 - 9 = (?)^2 - (?)^2 = (?) - ?)(?) + ?)$ ;

3)  $81 - 4a^6 = (?)^2 - (?)^2 = (?) - ?)(?) + ?)$ ;

4)  $? - ? = (4x)^2 - (5y)^2 = (?) - ?)(?) + ?)$ .

8. Разложить разность квадратов на множители и результат проверить подробным умножением:

1)  $9 - 25x^2 = (3 - 5x)(3 + 5x)$ .



$$2) 49y^2x^2 - 16 =$$

$$3) 16 - 49x^2y^2 =$$

$$4) 1 - 0,25k^6 =$$

$$5) 36a^8 - 196 =$$

$$6) 0,81 - 36a^4 =$$

$$7) \frac{4}{9}k^2 - 81p^4 =$$

9. Восстановить пропущенные числа и знаки в следующих примерах, связанных с разностью квадратов:

$$1) ? - 9x^4 = (10 + ?)(10 - ?);$$

$$2) 81 - ? = (? + 5k^2)(? - ?);$$

$$3) (? - ?) : (10 - ?) = (? + 3p);$$

$$4) (4a^6 - ?) : (? + 7) = (? - 7).$$

10. В следующих примерах записаны в различных формах связи между тремя выражениями: суммой двух чисел, разностью этих же чисел, разностью квадратов тех же чисел. Заполнить таблицу:

Сокращенное умножение разности двух чисел на их сумму	Разложение разности квад- ратов двух чи- сел на множители	Сокращение дроби (сокращение деление)	Сокращение дроби (сокращение деление)
1. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$	$\frac{a^2 - b^2}{(a + b)} = a - b$
2. $(x + 3)(x - 3) = \dots$			
3.	$k^4 - 36 = ( ) \cdot ( )$		
4.		$\frac{121 - 4c^6}{11 - 2c^3}$	
5.			$\frac{9 - 25k^4}{3 - 5k^2}$

11. Сократить дроби:

$$1) \frac{9 - k^2}{k^3 - 3k^2} = \frac{(3 - k)(3 + k)}{k^2(k - 3)} = \frac{-(k - 3)(3 + k)}{k^2(k - 3)} = \frac{3 + k}{k^2};$$

$$2) \frac{16a^3 - a}{b - 4ab};$$

$$5) \frac{15x^2 - 75x}{30yx - 150yx^2};$$

$$3) \frac{-25 + b^2}{-5 + b};$$

$$6) \frac{4x^2y^2 - x^2}{x + 2xy};$$

$$4) \frac{0,81 - a^2}{a - 0,9};$$

$$7) \frac{9y^2k - ky}{2k^2 - 6k^2y}.$$



12. В то время как разность двух квадратов разлагается на два множителя, сумма квадратов не разлагается на множители.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$a^2 + b^2$  — на множители не разлагается.

Разложить на множители следующие пары примеров:

$$1a) x^2 + 9 =$$

$$3a) 64 + 81p^4e^6 =$$

$$1б) x^2 - 9 =$$

$$3б) 64 - 81p^4e^6 =$$

$$2a) 49 - 16k^2b^2 =$$

$$4a) 1 - k^8 =$$

$$2б) 49 + 16k^2b^2 =$$

$$4б) 1 + k^8 =$$

13. Сократить дроби. В каких случаях дроби не сокращаются? Почему?

$$1a) \frac{y^2 - 16}{x - 4};$$

$$2a) \frac{4k^2 - 1}{2k - 1};$$

$$3a) \frac{a^2 + 9}{a + 3};$$

$$4a) \frac{b^2 - 25}{b - 5};$$

$$1б) \frac{y^2 + 16}{y - 4};$$

$$2б) \frac{4k^2 + 1}{2k + 1};$$

$$3б) \frac{a^2 + 9}{a - 3};$$

$$4б) \frac{b^2 - 25}{5};$$

$$1в) \frac{y^2 + 16}{y + 4};$$

$$2в) \frac{4k^2 - 1}{2k - 1};$$

$$3в) \frac{a^2 - 9}{a - 3};$$

$$4в) \frac{b^2 - 25}{b}.$$

14. Придумать три алгебраические дроби, чтобы в них числителем была разность двух квадратов, а знаменателем — разность оснований. Сократить дроби.

15. Придумать алгебраическую дробь, чтобы в ней числителем была сумма двух чисел, а знаменателем — разность квадратов тех же чисел. Сократить дроби.

16. Восстановить пропущенные числа в следующих примерах на сокращение дробей:

$$\frac{1. ?}{?} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{2 \cdot (1 + x)} = \frac{1 - x}{2};$$

$$\frac{2. ?}{?} = \frac{(a - 2b)(a + 2b)}{4a(a - 2b)} = \frac{a + 2b}{4a}.$$

17. а) Чему равно частное от деления разности квадратов двух чисел на их разность? Придумать пример.

б) Чему равно частное от деления разности двух квадратов на сумму первых степеней? Придумать пример.

в) Чему равно произведение суммы двух чисел на их разность? Придумать пример.

Дальше решаются примеры на все действия с алгебраическими дробями; при этом знаменатели дробей подбираются так, чтобы они разлагались на множители одним из известных уже способов (вынесение за скобки, группировки, разложение на множители по формуле).



Например, решается упражнение:

$$\left( \frac{5}{16 - 9a^2} - \frac{1}{4a - 3a^2} \right) \cdot \frac{12 - 9a}{4}.$$

Дальше, как известно, изучаются следующие формулы:

1) Квадрат суммы и разности двух чисел:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

2) Сумма и разность кубов:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

3) Куб суммы и разности двух чисел:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Методика изучения этих формул и совокупность упражнений таковы же, что и при изучении формулы разности квадратов.

Сделаем в заключение краткое замечание об изучении понятий «возведение в степень» и «извлечение корня», которые удобно также ввести одновременно. Пусть решен пример:

$$(b^4)^3 = b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 = b^{4 \cdot 3} = b^{12}.$$

Далее ставится обратная задача:  $x^3 = b^{12}$ ; по степени ( $b^{12}$ ) и показателю (3) надо найти неизвестное основание ( $x$ ).

Вместо записи  $x^3 = b^{12}$  удобно писать равенство со специальным значком — радикалом:  $x = \sqrt[3]{b^{12}}$ ; показатель (3) над радикалом показывает, что если число  $x$  возвести в третью степень, то получится подкоренное выражение ( $b^{12}$ ), обратную операцию принято называть так:

Извлечь корень 3-й степени из числа  $\sqrt[3]{b^{12}}$ .

Имеем:  $\sqrt[3]{b^{12}} = \dots = b^4$ .

Очевидно, что промежуточной операцией будет деление показателей; заполняется промежуточное звено:

$$\sqrt[3]{b^{12}} = b^{12:3} = b^4.$$

На доске и в тетрадях фиксируются рядом две записи и объединенное двойное правило:

$$(b^4)^3 = b^{4 \cdot 3}.$$

Чтобы возвести степень в степень, надо перемножить показатели, а основание оставить то же.

$$\sqrt[3]{b^{12}} = b^{12:3}.$$

Чтобы извлечь корень из степени, надо показатель подкоренного выражения разделить на показатель корня, а основание оставить то же.

В настоящее время возведение в степень рассматривается в VI классе, а извлечение корня (в связи с изучением квадратных уравнений) — в VIII классе.



Между тем, как мы уже указывали выше, разложение на множители по формуле сокращенного умножения основано на неявном извлечении корня.

Поэтому, вероятно, имеет смысл извлечение корня с его символом — радикалом ввести уже в младших классах.

Аналогично сказанному возможно рассматривать одновременно взаимно обратные операции над степенями с дробными показателями:

$$x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4}} \longleftrightarrow x^{\frac{5}{4}} : x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}};$$

$$\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^6 = y^{\frac{2}{3} \cdot 6} = y^4 \longleftrightarrow (y^4)^{\frac{1}{6}} = y^{4 \cdot \frac{1}{6}} = y^{\frac{2}{3}} \text{ и т. п.}$$

## ГЛАВА II.

### ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

#### 1. СОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

При изучении уравнений и их систем в школе обычно ограничиваются решением готовых уравнений, взятых из различных источников.

С процессом составления уравнений ученики встречаются лишь при решении задач алгебраическим способом.

Однако для глубокого овладения понятием «уравнение» оказываются необходимыми упражнения по синтезу уравнений, имеющих заданные решения, причем такие упражнения должны решаться вместе с обычными аналитическими упражнениями, являясь их органическим дополнением.

Одним из трудных вопросов в методике алгебры является ознакомление учащихся с уравнениями, не имеющими решения.

Существующая методика ставит ученика в трудное положение: последний по существу не понимает причины того, почему из двух уравнений, имеющих одинаковую структуру, одно имеет решение, а другое — нет.

Понимание сущности вопроса достигается посредством составления уравнения с данным свойством.

Учитель имеет возможность показать учащимся понятно и ясно, как можно составить соответствующие уравнения, не имеющие решения.

Например, составим уравнение, сводящееся после преобразований к неверному равенству ( $3 = 4$ ). К этому «соотношению» применяем цепь обычных преобразований:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 3 + x = 4 + x; \\ \text{(II)} \quad & (3 + x) \cdot 2 = 8 + 2x; \end{aligned}$$

Все по-  
смысле отсу-  
ние, состав-  
приводится  
гому невер-  
При сост-  
рядом два  
и составлен-  
но решено

Решение уравнения

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-2}$$

Значен-  
летворяе

Пусть т-  
чение  $y =$   
Процесс  
половине л-  
ности (5) -  
Можно  
Пусть д-  
не имеющие  
Если к  
выражение  
лучим нов



$$(III) (3+x) \cdot 2 = 9 - 3x - x - 1;$$

$$(IV) \frac{(3+x) \cdot 2}{3} = \frac{9 - 3x - x - 1}{3};$$

$$(V) \frac{(3+x) \cdot 2}{3} = 3 + x - \frac{x-1}{3} \text{ и т. д.}$$

Все получающиеся таким образом уравнения равносильны в смысле отсутствия решения. Учащиеся решают последнее уравнение, составленное учителем, и убеждаются, что оно действительно приводится к заранее намеченному  $(3=4)$  или к какому-либо другому неверному равенству.

При составлении уравнений по аналогии удобно фиксировать рядом два процесса: решение данного уравнения (сверху вниз) и составление аналогичного уравнения (снизу вверх). Пусть подробно решено уравнение, не имеющее корня:

[ (I)  $\rightarrow$  (II)  $\rightarrow$  (III)  $\rightarrow$  (IV)  $\rightarrow$  (V) ]:

Решение уравнения	$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{8}{x^2-4};$ (I)	Составление уравнения	$\frac{3}{y-3} - \frac{2}{y+3} = \frac{18}{y^2-9};$ (1)
	$\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{1(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{x^2-4};$ (II)		$\frac{3(y+3)}{y^2-9} - \frac{2(y-3)}{y^2-9} = \frac{18}{y^2-9};$ (2)
	$2(x+2) - (x-2) = 8;$ (III)		$3(y+3) - 2(y-3) = 18;$ (3)
	$2x + 4 - x + 2 = 8;$ (IV)		$3y + 9 - 2y + 6 = 18;$ (4)
	$x = 2.$ (V)		$y = 3.$ (5)
Значение $x = 2$ не удовлетворяет уравнению (I).			

Пусть требуется составить уравнение (1) с тем же свойством: значение  $y = 3$  не должно удовлетворять ему.

Процесс составления удобно развернуть снизу вверх в правой половине листа, проходя те же этапы, но в обратной последовательности  $(5) \rightarrow (4) \rightarrow (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$ .

Можно поступить и иначе.

Пусть для составляемого уравнения должно получиться значение, не имеющее смысла:  $x = 2$  (т. е.  $x - 2 = 0$ ). (I)

Если к обеим частям этого уравнения прибавим одно и то же выражение, имеющее смысл при  $x = 2$  (например,  $\frac{5x}{x+2}$ ), то получим новое уравнение (II), которое равносильно уравнению (I):

$$x - 2 + \frac{5x}{x+2} = \frac{5x}{x+2}. \quad (II)$$



Применение к (II) обычных преобразований всегда приводит к уравнению, равносильному (I):

$$x + \frac{-2(x+2) + 5x}{x+2} = \frac{5x}{x+2}; \quad (IIa)$$

$$x + \frac{3x-4}{x+2} = \frac{5x}{x+2} \quad (IIб)$$

и т. д.

Уравнения (II), (IIa) и (IIб) все имеют корень  $x = 2$ . Однако если к обеим частям уравнения (I) «прибавим» выражение, не имеющее смысла при  $x = 2$  (например,  $\frac{5x}{x-2}$ ), то такая операция приведет к уравнению (III), не имеющему решения:

$$x - 2 + \frac{5x}{x-2} = \frac{5x}{x-2}. \quad (III)$$

Применение к (III) обычных преобразований приводит к уравнению, равносильному (III) в смысле отсутствия решения:

$$x + \frac{-2(x-2) + 5x}{x-2} = \frac{5x(x+2)}{(x-2)(x+2)}; \quad (IIIa)$$

$$x + \frac{3x+4}{x-2} = \frac{5x^2+10x}{x^2-4} \quad (IIIб)$$

и т. д.

Уравнения (III), (IIIa) и (IIIб) не имеют решения, так как, преобразуя их, получим значение  $x = 2$ , при котором эти выражения теряют смысл.

Покажем далее, как теми же приемами можно составлять системы линейных уравнений с буквенными коэффициентами.

Пусть дано решение системы:

$$x = \frac{a+1}{b}; \quad y = \frac{b-1}{a}.$$

Составим систему, имеющую это решение, притом сделаем так, чтобы в правой части получились многочлены от параметров в первой степени, для чего подберем коэффициенты, нацело делящиеся на знаменатели:

$$\begin{cases} 2b \cdot \frac{a+1}{b} + a \cdot \frac{b-1}{a} = 2a + 2 + b - 1, \\ 3b \cdot \frac{a+1}{b} - a \cdot \frac{b-1}{a} = 3a + 3 - b + 1. \end{cases}$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 2bx + ay = 2a + b + 1, \\ 3bx - ay = 3a - b + 4. \end{cases} \quad (A)$$



Решив систему (A), получим, конечно, намеченный заранее ответ:

$$x = \frac{a+1}{b}; \quad y = \frac{b-1}{a}.$$

Придадим параметрам определенные значения, скажем такие:  $a = 3; b = 2$ .

Тогда получим систему с числовыми коэффициентами:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ 6x - 3y = 11. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2; \quad y = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пусть решена система уравнений:

$$\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1), \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4). \end{cases} \quad (I)$$

Ответ.  $x = 7; y = 5$ .

Проверка.

$$\begin{aligned} (7+5)(5-2) &? (7+2)(5-1); & (II) \\ (7-4)(5+7) &? (7-3)(5+4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3 &? 9 \cdot 4; \quad 36 = 36; & (III) \\ 3 \cdot 12 &? 4 \cdot 9; \quad 36 = 36. \end{aligned}$$

Если необходимо составить аналогичную систему уравнений, разворачиваем преобразования в обратной последовательности, т. е. запишем систему двух числовых тождеств:

$$\begin{cases} 8 \cdot 6 = 6 \cdot 8, \\ 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7. \end{cases} \quad (3)$$

Далее выбираем решение конструируемой системы, например:  $x = 4; y = 9$ .

Выразим множители тождеств (3) с помощью значений  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} (\overline{4} + 4)(\overline{9} - 3) = (\overline{4} + 2)(\overline{9} - 1), \\ (\overline{4} + 3)(\overline{9} - 4) = (\overline{4} + 1)(\overline{9} - 2). \end{cases} \quad (2)$$

И наконец, получаем искомую систему:

$$\begin{cases} (x+4)(y-3) = (x+2)(y-1), \\ (x+3)(y-4) = (x+1)(y-2). \end{cases} \quad (1)$$

Решив систему (1), получаем намеченные заранее значения неизвестных:

$$x = 4; \quad y = 9.$$



## 2. СОСТАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩЕЙ ОДНО И ТО ЖЕ РЕШЕНИЕ

Существует общий способ решения данного вопроса.

Пусть решением параметрической системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными должны быть числа:  $x = -1$  и  $y = 2$ . Напишем систему с этим решением с неизвестными коэффициентами:

$$\begin{cases} A \cdot (-1) + B \cdot 2 = K, \\ C \cdot (-1) + D \cdot 2 = M. \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты  $A, B, C, D$  могут быть выражены произвольно, лишь бы выполнялось условие:

$$A \cdot D \neq B \cdot C.$$

Свободные члены  $K$  и  $M$  вычисляются после подбора коэффициентов  $A, B, C, D$ .

Коэффициентам  $A, B, C, D$  дадим следующие значения:

$$A = a; \quad B = a + b; \quad C = 3a; \quad D = a + 2b.$$

Найдем далее значения  $K$  и  $M$ :

$$\begin{aligned} K &= a \cdot (-1) + (a + b) \cdot 2 = -a + 2a + 2b = a + 2b, \\ M &= 3a \cdot (-1) + (a + 2b) \cdot 2 = -3a + 2a + 4b = -a + 4b. \end{aligned}$$

Мы составили систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot x + (a + b)y = a + 2b, \\ 3a \cdot x + (a + 2b)y = -a + 4b. \end{cases}$$

Учитывая условие  $A \cdot D \neq C \cdot B$ , имеем.

$$a(a + 2b) \neq (a + b)3a.$$

Пусть  $a \neq 0$ ; тогда имеем:  $a + 2b \neq 3a + 3b$ , или  $b \neq -2a$ .  
Итак, последняя система имеет единственное решение:

$$x = -1, \quad y = 2 \quad \text{при} \quad a \neq 0, \quad b \neq -2a.$$

Положим, например,  $a = 3, b = 4$ .

Тогда соответственно найдем:  $A = 3; B = 3 + 4 = 7;$

$$C = 3 \cdot 3 = 9; D = 3 + 8 = 11; M = -3 + 16 = 13.$$

Итак, система уравнений

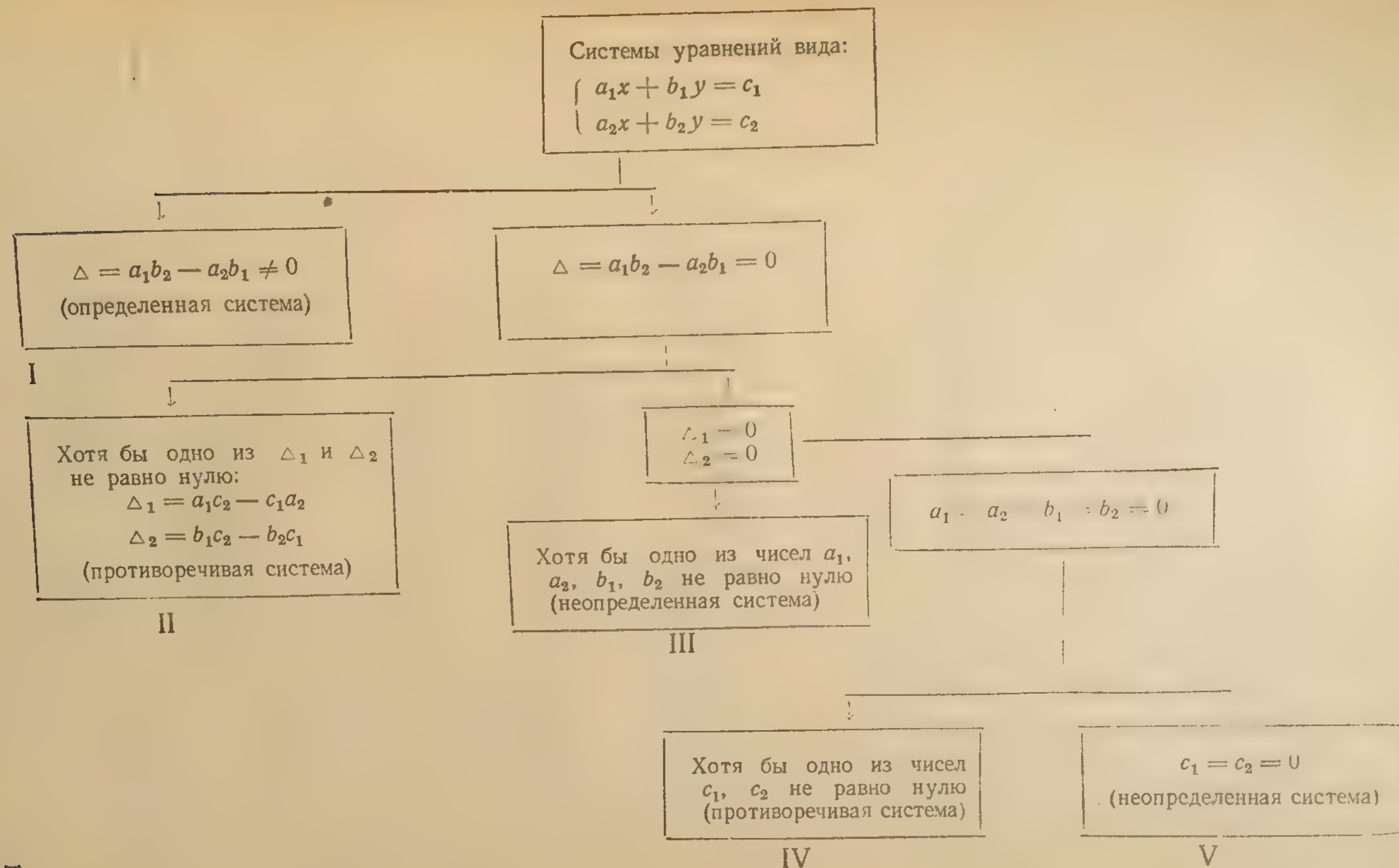
$$\begin{cases} 3x + 7y = 11, \\ 9x + 11y = 13 \end{cases} \text{ имеет указанное решение: } x = -1, y = 2.$$

## 3. О КЛАССИФИКАЦИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее удобной для пользования в школе представляется классификация, приведенная ниже.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$







Необходимо разъяснить учащимся смысл оборота *хотя бы*. Выражение «хотя бы одно из чисел  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , не равно нулю» означает, что выполняется один из четырех возможных случаев:

- 1) какое-либо одно из этих чисел не равно нулю;
- 2) какие-либо два из них не равны нулю;
- 3) какие-либо три из них не равны нулю;
- 4) все четыре не равны нулю.

После того как будет понята эта мысль, легко находить *противоречащее* суждение («все числа равны нулю»:  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ ).

По этой схеме наглядно видно, что существует один вид определенной системы (I); два вида неопределенной системы (III, V); два вида противоречивой системы (II, IV).

Полезно предлагать ученикам составлять системы уравнений, удовлетворяющие тем или иным условиям, например:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x - 5y = 10; \end{cases} & \text{(I)} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x + 6y = 10; \end{cases} & \text{(III)} \\ \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 4x + 6y = 1; \end{cases} & \text{(II)} \quad \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 4, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases} & \text{(IV)} \end{array}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \end{cases} \quad \text{(V)}$$

Сделаем замечание о терминах, удачный выбор которых имеет немаловажное значение для развития мышления учащихся.

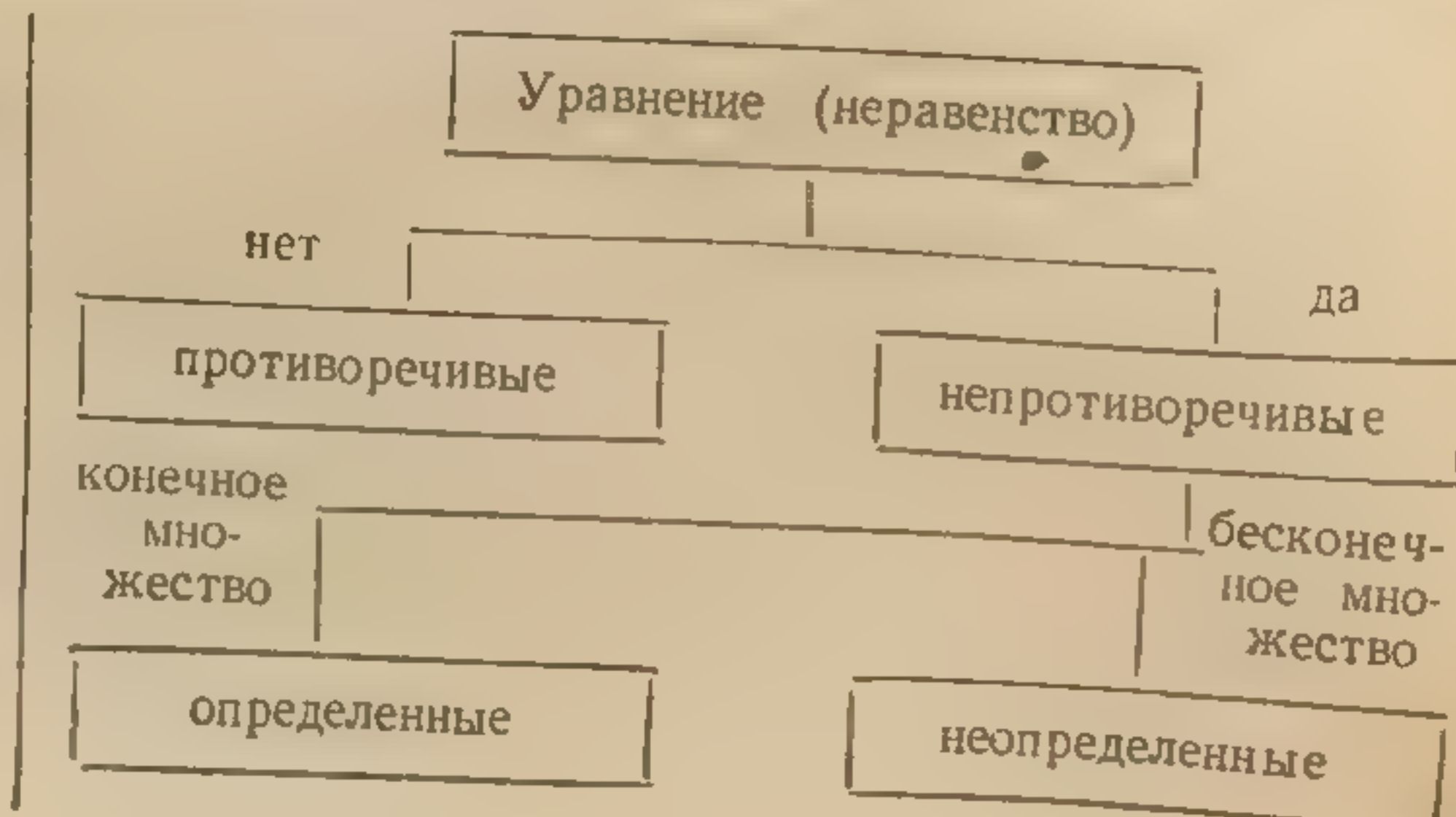
В методической литературе используются часто термины «совместные» и «несовместные» системы уравнений, неравенств.

Представляется более удобным для тех же понятий употреблять термины «непротиворечивые» и «противоречивые»; последние имеют то преимущество, что могут быть отнесены не только к системам, но и к одному уравнению или одному неравенству.

При обучении математике можно пользоваться следующей общей классификацией уравнений (неравенств);

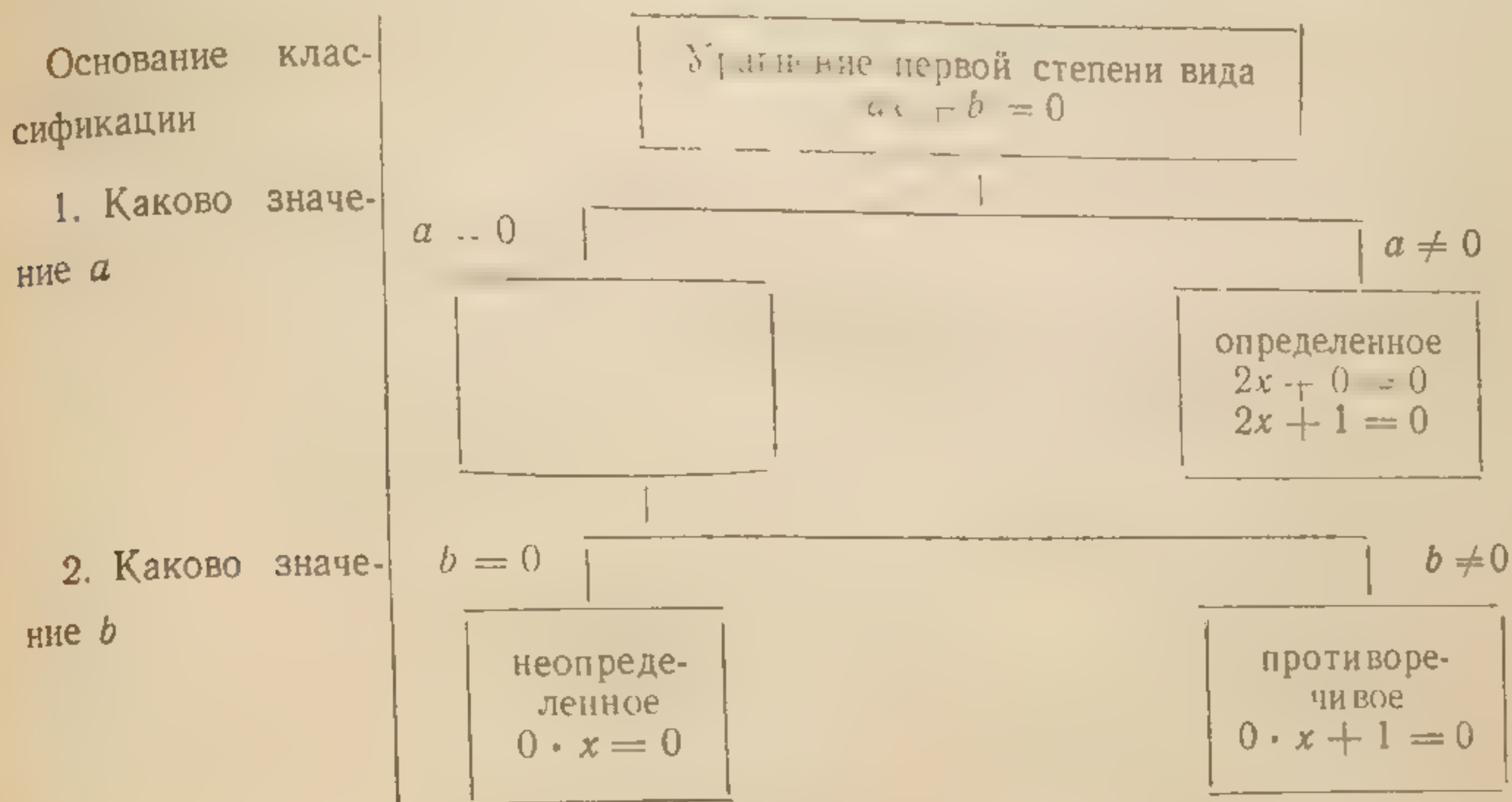
Основание деления  
I. Наличие решений

II. Каково множество  
решений (сколько  
решений)





Применительно к уравнениям первой степени с одним неизвестным данная классификация будет выглядеть так:



Какие бы уравнения или неравенства ни изучались, учителю важно добиваться логической полноты их разновидностей, причем очень важно употреблять соответствующую терминологию.

Так, изучая уравнения первой степени, полезно разобрать хоть несколько таких, которые приводятся

к противоречию:

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= x + x - 6; \\ 2x - 2x &= 8 - 6; \\ (2 - 2)x &= 2; \\ 0 \cdot x &= 2. \end{aligned}$$

Последнее уравнение не имеет решения.

Значит, исходное уравнение  $2x - 8 = x + x - 6$  противоречивое

к неопределенности:

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= x + x - 9 + 1; \\ 2x - 2x &= 8 - 9 + 1; \\ (2 - 2)x &= 0; \\ 0 \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение имеет бесконечное множество решений.

Значит, исходное уравнение  $2x - 8 = x + x - 9 + 1$  неопределенное.

Отметим, что в методических пособиях нередко допускают ошибки при изложении вопросов классификации системы линейных уравнений и решении соответствующих задач.



1. В книге «Методика преподавания математики» под общей редакцией С. Е. Ляпина (ч. II, Учпедгиз, 1956) утверждается следующее положение:

$$\text{«Если } a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \text{ то } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

$$\text{Из } a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \text{ следует: } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ т. е.}$$

если система уравнений несовместна, то коэффициенты неизвестных соответственно пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам» (стр. 140).

Оба эти утверждения ошибочны: если, например,  $a_2 = 0$ , то из условий  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  ( $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ ) отнюдь не вытекают заключения:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \left( \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \right);$$

делить на нуль нельзя!

Правильным являются не приведенные суждения, а суждения обратные:

$$\text{Если } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ то } a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

$$\text{Если } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ то } a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0.$$

Аналогичные ошибки повторяются в этой книге в других местах (стр. 140, 141).

2. В книге А. Н. Барсукова «Алгебра» (ч. II. Учебник для VIII—X классов средней школы. Учпедгиз, 1957) утверждается, что при  $a_1 \neq 0$ ;  $b_1 \neq 0$ ;  $a_2 \neq 0$ ;  $b_2 \neq 0$  система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (\text{I})$$

равносильна системе:

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Исследование системы (I) производится исходя из этого основного положения.

Однако это исходное положение ложно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести хотя бы один противоречащий пример.

Возьмем непротиворечивую, но неопределенную систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases} \quad (\text{III})$$



Заменим систему (III) по схеме А. Н. Барсукова системой:

$$\begin{cases} (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)x = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1, \\ (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)y = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ 0 \cdot y = 0. \end{cases} \quad (\text{IV})$$

Очевидно, системы (III) и (IV) не равносильны. Например,  $x = y = 2$  является решением системы (IV), но не является решением системы (III).

3. В «Задачнике по алгебре» В. А. Кречмара (Гостехиздат, 1950) предлагается следующее упражнение:

«№ 29. Показать, что для совместности уравнений  $ax + b = 0$ ,  $a'x + b' = 0$  необходимо и достаточно, чтобы  $ab' - a'b = 0$ ».

Ошибка при решении задачи допущена в том месте, когда автор полагает, что из  $ab' - a'b = 0$  следует пропорциональность коэффициентов, т. е.  $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$  (например, при  $a = 0$ ,  $b = 0$ ;  $a' = 1$ ,  $b' = 1$  первое уравнение имеет бесчисленное множество решений, второе — одно решение; однако условие  $ab' - a'b = 0$  соблюдается).

4. В книге К. С. Барыбина и А. К. Исакова «Сборник задач по математике» (Учпедгиз, 1955) приводится следующая задача на исследование:

«661. Доказать, что если система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1) не имеет решения, то

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2};$$

2) имеет бесчисленное множество решений, то

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Авторы задачи не замечают, что оба утверждения ложные, а верными являются обратные им предложения.

#### 4. ОБ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Обычно изучение функции (в том числе и линейной) основывается в школе только на построении графиков их по готовому уравнению. Обратная задача в школе рассматривается реже, и не случайно ученики, умеющие строить график по точкам, затрудняются написать уравнение функции по данным координатам точек, определяющих график функции.

Эту тему следует изучать при сочетании алгебраического и геометрического методов, с привлечением одного из них для контроля результата, полученного другим методом.



Весьма важно соблюдать постепенность нарастания трудностей при решении таких упражнений. Уже при изучении прямой пропорциональности необходимо установить, что не только уравнению  $y = ax$  всегда соответствует прямая, проходящая через начало координат, но и наоборот: любой прямой, проходящей через начало координат, соответствует уравнение вида  $y = ax$  (за исключением самой оси ординат).

Для этих целей следует наравне с решением задач по вычерчиванию графиков выполнять упражнения типа:

1. Прямая проходит через начало координат и точку  $A(3; 4)$ . Найти ее уравнение, потом проверить ответ.

Решение сводится к определению коэффициента  $a$  по известным значениям  $x$  и  $y$ , что осуществляется подстановкой координат в общее уравнение:

$$4 = a \cdot 3; \quad a = \frac{4}{3}.$$

Так, искомое уравнение будет:  $y = \frac{4}{3} \cdot x$ .

Проверка алгебраическая:  $4 = \frac{4}{3} \cdot 3; \quad 4 = 4$ .

Проверку можно провести и геометрически. Построив прямую  $y = \frac{4x}{3}$ , убедиться, что она действительно проходит через точку  $A(3; 4)$ .

В дальнейшем задания могут несколько усложняться и предлагаться учащимся в следующих формах:

2. Линейная функция  $y = 2x + b$  при  $x = 4$  принимает значение, равное 9. Написать уравнение этой функции (определить  $b$ ).

3. График функции  $y = ax + 3$  проходит через точку  $A(2; 5)$ . Найти значение  $a$ .

4. Прямая проходит через точки  $A(2; 1)$  и  $B(-2; -3)$ . Написать уравнение этой прямой.

Решение таких задач основывается на методе «неопределенных коэффициентов», знакомство с которым, не требуя каких-либо новых теоретических сведений, позволяет выполнять существенно новые виды упражнений.

Выполним последнее задание.

Искомое уравнение имеет вид:

$$y = ax + b.$$

Подставляя координаты обеих точек в это уравнение для определения двух неизвестных параметров  $a$  и  $b$ , получим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 2 + b, \\ -3 = a \cdot (-2) + b. \end{cases}$$



Откуда  $a = 1$ ;  $b = -1$ .

Искомое уравнение:  $y = x - 1$ .

5. Следующим этапом усложнения задания, усиления элементов самостоятельности является задание, когда предлагается вниманию учащихся график прямой линии, проходящей через несколько точек с целочисленными координатами (рис. 33)

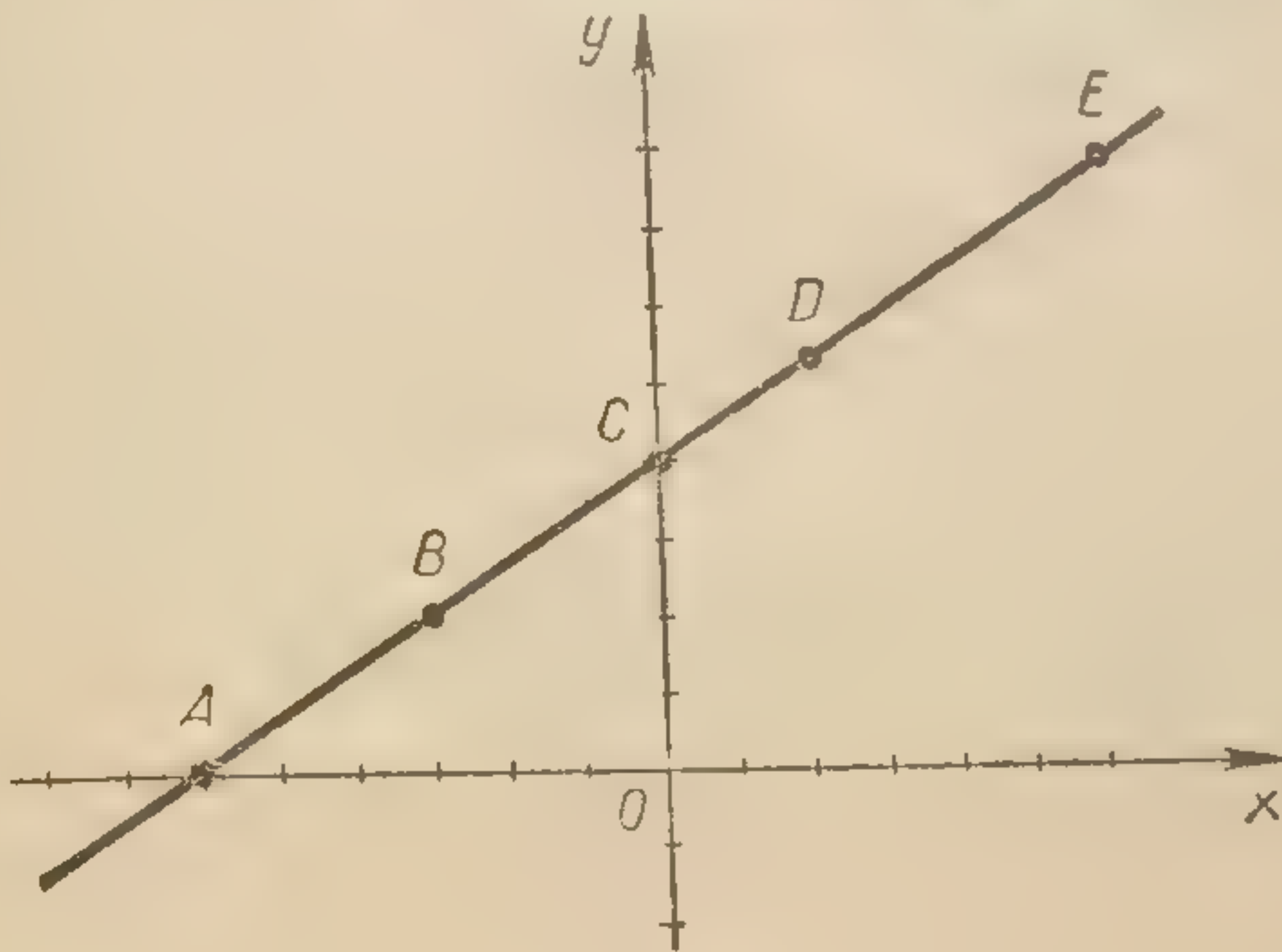


Рис. 33

Ученики должны сами определить координаты любых двух точек прямой и по ним написать уравнение прямой. Проверка обязательна, причем она может проводиться подстановкой в найденное уравнение координат не обязательно данных двух точек, но любых иных точек прямой.

С учащимися выясняется вопрос: координаты скольких точек надо подставлять в уравнение для проверки правильности найденного уравнения? Почему?

(Достаточно подставить в уравнение  $y = ax + b$  координаты двух точек, так как уравнение  $y = ax + b$  определяет прямую, а прямая определяется двумя точками.)

Так, например, одни учащиеся могут взять пару точек: A (-6; 0) и D (2; 5); другие — взять пару точек: B (-3; 2) и E (6; 8) и т. д.

Подставив значения выбранных точек в общее уравнение прямой и решив получившуюся систему уравнений, они получают одно и то же уравнение  $y = \frac{2}{3}x + 4$ . Это обстоятельство приобретает существенное психологическое значение (единство результата при разных подходах).



## 5. ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ<sup>1</sup>

Как известно, изучение уравнений и неравенств в школе проводится сейчас отдельно.

Проведенный нами эксперимент показывает возможность одновременного изучения этих вопросов.

Поскольку результат сравнения двух чисел, двух значений величины может быть выражен одним из двух суждений: равно и не равно ( $a = b$ ;  $a \neq b$ ), полезно уже с первых уроков алгебры требовать, чтобы учащиеся приводили примеры равенств и двух видов неравенств ( $5 = 5$ ;  $7 \neq 5$ ;  $5 < 7$ ;  $7 > 5$ ).

Ученики легко осваиваются с противопоставлением неравенств и равенств, а также учатся различать условные и безусловные формы их (полезно требовать, чтобы они приводили свои примеры к каждому виду этих выражений).

Свойства равенства и неравенства выводятся одновременно следующим образом:

1. Если к обеим частям  $\frac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$  прибавить одно и то же число, то его знак сохраняется:

$\begin{array}{r} 5 = 5 \\ (+3) (+3) \\ \hline 5 + 3 = 5 + 3 \\ 8 = 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 = 5 \\ (-3) (-3) \\ \hline 5 - 3 = 5 - 3 \\ 2 = 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 < 6 \\ (+3) (+3) \\ \hline 5 + 3 < 6 + 3 \\ 8 < 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 > 5 \\ (-3) (-3) \\ \hline 6 - 3 > 5 - 3 \\ 3 > 2 \end{array}$
--	--	--	--

2. Если обе части  $\frac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$  умножить или разделить на одно и то же *положительное* число, то его знак сохраняется:

$\begin{array}{r} 5 = 5 \\ \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 5 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \\ 15 = 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 < 6 \\ \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 5 \cdot 3 < 6 \cdot 3 \\ 15 < 18 \end{array}$
--	--

3. Если обе части  $\frac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$  умножить или разделить на одно и то же *отрицательное* число, то его знак сохраняется  
изменяется на противоположный

<sup>1</sup> Следует отметить, что даже первоклассники способны усваивать одновременно понятия «равенство» и «неравенство» при одновременном изучении превращения одного в другое



$$\begin{array}{r} + 5 = - 5 \\ \cdot (-3) \cdot (-3) \\ \hline - 5 \cdot 3 = - 5 \cdot 3 \\ - 15 = - 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 < 6 \\ \cdot (-3) \cdot (-3) \\ \hline - 5 \cdot 3 > - 6 \cdot 3 \\ - 15 > - 18 \end{array}$$

В дальнейшем выполняются упражнения в одновременном решении уравнений и неравенств первой степени, причем вначале удобно уравнение преобразовать в неравенство одной лишь заменой знаков, и наоборот.

Пусть решено уравнение:

$$\begin{array}{lcl} 3x - 5 = x + 9; & (I) & 3x - 5 > x + 9; & (1) \\ 3x - x = 9 + 5; & (II) & 3x - x > 9 + 5; & (2) \\ 2x = 14; & (III) & 2x > 14; & (3) \\ x = 7. & (IV) & x > 7. & (4) \end{array}$$

Заменив в (I) знак равенства на знак «больше» (или «меньше»), получим неравенство (1), решаемое справа.

Вторая пара упражнений решается в другой последовательности: сначала решается неравенство, которое затем преобразуется в уравнение.

При записи проверки ответа уравнения удобно вычисления контроля неравенства

вести сразу в обеих частях исходного выражения, причем согласно логике процесса между частями выражения удобно писать знак вопроса; последний заменяется определенным знаком ( $=$ ,  $>$ ,  $<$ ) лишь в конце вычислений:

$$\begin{array}{l} -6x - 4 = -x + 11; \\ -6x + x = 11 + 4; \\ -5x = 15; \\ x = -3. \end{array}$$

Проверка ответа.

$$\begin{array}{l} -6 \cdot (-3) - 4 ? - \\ -(-3) + 11; \\ + 18 - 4 ? + 3 + 11. \\ 14 = 14, \text{ что и должно быть.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6x - 4 < -x + 11; \\ -6x + x < 11 + 4; \\ -5x < 15; \\ 5x > -15; \\ x > -3. \end{array}$$

Контроль ответа.

$$\begin{array}{l} \text{Пусть } x = -2 > -3; \\ -6 \cdot (-2) - 4 ? - (-2) + \\ + 11; \\ + 12 - 4 ? + 4 + 11. \\ 8 < 15, \text{ что и должно быть.} \end{array}$$

Использование двух терминов «проверка ответа уравнения» и «контроль ответа неравенства» объясняется так: ответ уравнения (корень) есть одно число; если оно удовлетворяет уравнению, то проверка исчерпана.

В ответе к неравенству неизвестное число может принимать хотя и не всякие, но сколько угодно значений.



Убедившись, что для одного конкретного значения неизвестного неравенство верно, мы, вообще говоря, проверку не исчерпали: это есть осуществление лишь частичного «контроля».

Решив отдельно такую пару «уравнение — неравенство», надо показать экономную совместную запись их в форме «нестроого» неравенства:

$$\begin{aligned} -6x - 4 &\geq -x + 11; \\ -6x + x &\geq 11 + 4; \\ -5x &\geq 15; \\ \frac{-5x}{-5} &\leq \frac{15}{-5}; \\ x &\leq -3. \end{aligned}$$

После нескольких пар подобных упражнений решаются вперемежку и отдельные уравнения или неравенства.

В старших классах необходимо предлагать пары упражнений, решаемых существенно разными способами, четко выделив различие этих процессов:

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{x} &= 4; \\ 5+x &= 4x; \\ 5 &= 3x; \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Если данное уравнение удалось свести к линейному, то соответствующее неравенство решается посредством системы линейных неравенств (см. справа).

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{x} &> 4; \\ \frac{5+x}{x} - 4 &> 0; \\ \frac{5+x-4x}{x} &> 0; \\ \frac{5-3x}{x} &> 0; \\ \text{а) } \begin{cases} 5-3x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \\ 0 < x < \frac{5}{3}; \\ \text{б) } \begin{cases} 5-3x < 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Противоречивая система.

$$\text{О т в е т. } 0 < x < \frac{5}{3}.$$

Из сказанного выше вытекает необходимость изучения графика линейной функции в тесной связи с линейным уравнением и линейным неравенством. Построив график функции вида  $y = ax + b$ , обычно ограничиваются установлением абсциссы точки пересечения прямой с осью  $x = b$  (графическое решение линейного уравнения). Значительно выгоднее извлекать максимум ин-



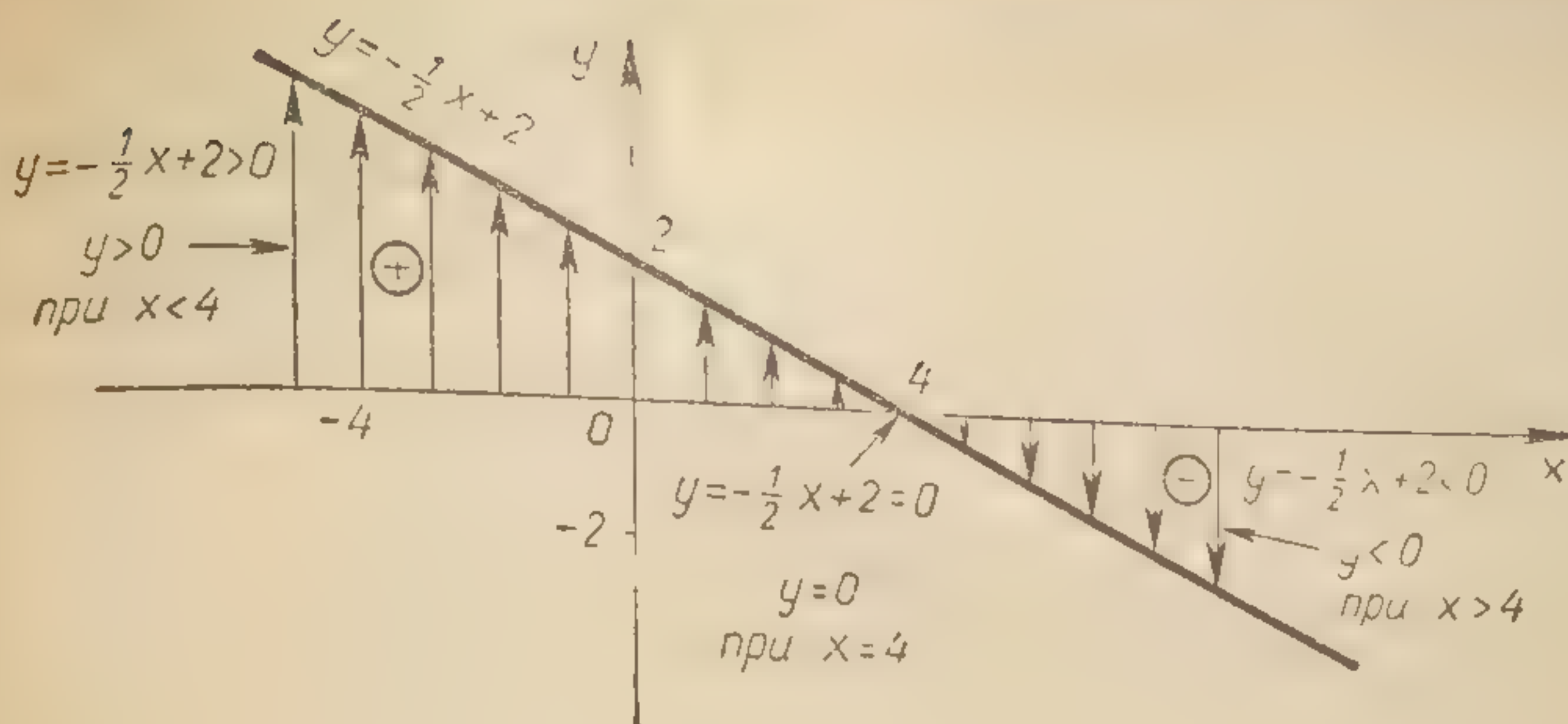


Рис. 34

формации из построенного графика, т. е. устанавливать тут же и решение двух линейных неравенств:  $y = ax + b \leq 0$ .

Иначе говоря, исследованием линейной функции надо заниматься как составной частью упражнений по решению большинства линейных уравнений и неравенств.

На рис. 34 показано, как следует толковать построение графика линейной функции  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  в качестве графического решения не только уравнения  $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$ , но и в качестве графического решения соответствующих этому уравнению двух неравенств:

$$-\frac{1}{2}x + 2 > 0; \quad -\frac{1}{2}x + 2 < 0.$$

Отметим, наконец, что ответ решенного неравенства содержит больше информации, чем ответ соответствующего ему уравнения.

Пусть решено неравенство  $3x - 5 > x + 9$  и получен ответ:  $x > 7$ .

Этого уже достаточно, чтобы утверждать (без дополнительных выкладок!), что противоположное неравенство  $3x - 5 < x + 9$  будет иметь решение:  $x < 7$ , а соответствующее уравнение будет иметь корень  $x = 7$ .

Если же вначале решено уравнение  $3x - 5 = x + 9$  (корень  $x = 7$ ), то мы не имеем возможности судить конкретно о решении, например, неравенства  $3x - 5 > x + 9$  без дополнительных преобразований (мы обладаем в этот момент лишь информацией, что решением будет одно из двух выражений:  $x > 7$  или  $x < 7$ ).

Дидактический вывод таков: следует вначале больше решать линейных неравенств с последующим преобразованием их в соот-



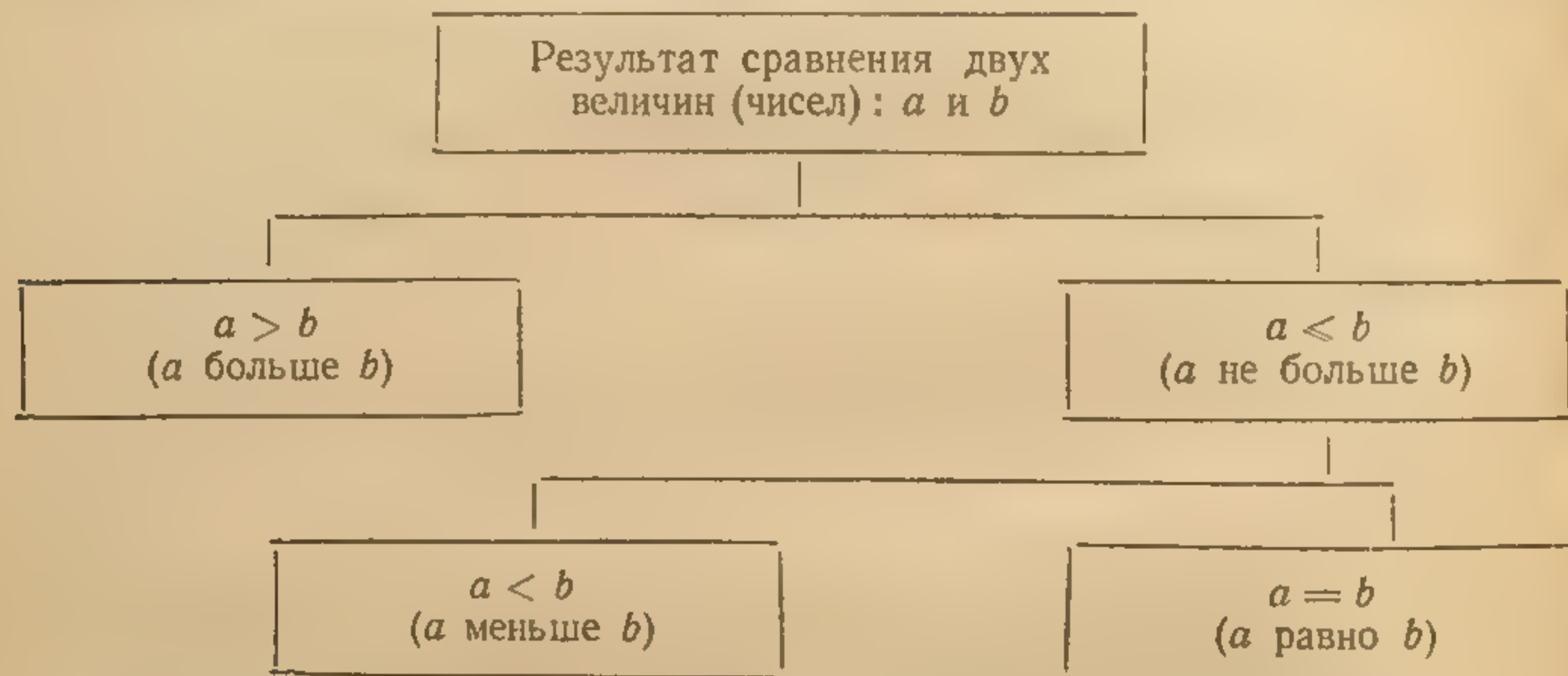
ветствующие уравнения, зная, что корень соответствующего уравнения находится автоматически.

Удобно записывать решение такого комплексного задания (трихотомии) в компактной форме:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} x + 9; \\ 2x &\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 14; \\ x &\begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 7. \end{aligned}$$

В заключение скажем несколько слов о применении понятий «строгое неравенство» ( $x + 3 > 5$ ) и «нестрогое неравенство» ( $x + 3 \geq 5$ ).

В настоящее время последнее понятие почти не употребляется в средней школе; между тем его без особых трудностей можно рассматривать уже в восьмилетней школе как совокупность уравнения и неравенства (решение такого нестрогого неравенства приведено выше). Применение нестрогого неравенства тем полезно, что учащиеся получают возможность ознакомиться с новым логическим подходом к противоречащим понятиям.



## 6. О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, В ЗАПИСИ КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАН ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (МОДУЛЯ)

Освоение этого материала возможно лишь при использовании и истолковании знака модуля, начиная с первых шагов изучения рациональных чисел.

Так, после ознакомления с понятием «абсолютная величина» и координатной осью надо уже предлагать решения уравнений вида  $|x| = 3$  (рис. 35).

Решение иллюстрируется на чертеже и записывается так:

$$|x| = 3; \quad \left. \begin{matrix} -x = 3 \\ x = 3 \end{matrix} \right\}; \quad \left. \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \right\}; \quad (x_1 = -3) \cup (x_2 = 3). \quad (I)$$



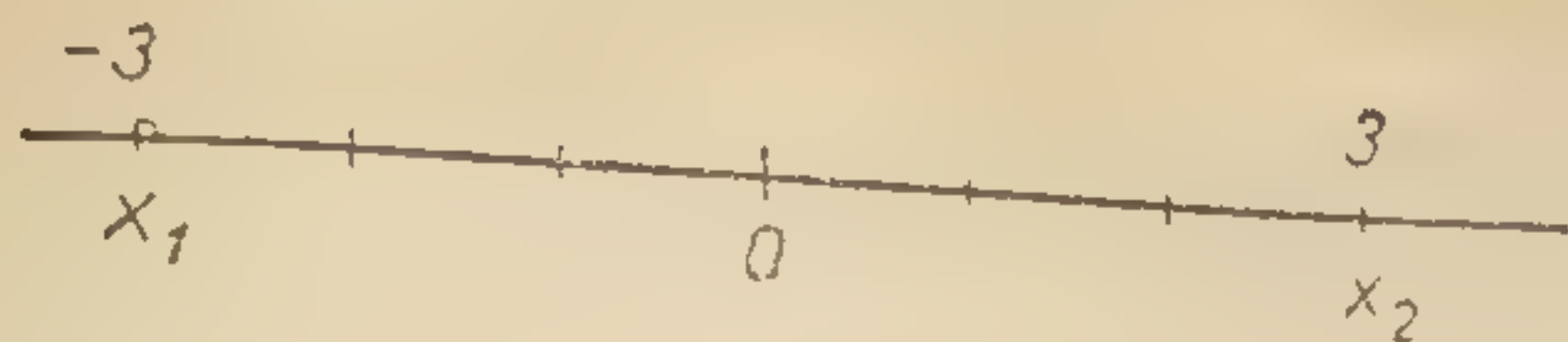


Рис. 35

На этих простейших упражнениях осваивается смысл символов совокупности уравнений, объединения множеств<sup>1</sup>.

Далее тут же предлагается решить соответствующие неравенства, например:

$$|x| < 3; \begin{cases} -x < 3, \\ x < 3; \end{cases} \begin{cases} x > -3, \\ x < 3. \dots \end{cases}$$

Решением этого неравенства является пересечение областей, что можно изобразить и по-другому:

$$(x > -3) \cap (x < 3); -3 < x < 3 \text{ (рис. 36).} \quad (II)$$



Рис. 36

Предлагаем третье (последнее) упражнение семейства, решением которого является совокупность неравенств:

$$|x| > 3; \begin{cases} -x > 3 \\ x > 3 \end{cases}; \begin{cases} x < -3 \\ x > 3 \end{cases}; (x < -3) \cup (x > 3) \text{ (рис. 37).} \quad (III)$$



Рис. 37

В практике обучения особенно частые ошибки возникают из-за неумения отличать друг от друга систему (II) от совокупности (III).

Делу поможет выполнение следующих пар упражнений:

1а. Записать одно уравнение в виде совокупности двух уравнений:

$$|x| = 4; \begin{cases} ? = ? \\ ? = ? \end{cases}; (? = ?) \cup (? = ?).$$

1б. Записать совокупность двух решений (уравнений) в виде одного уравнения:

<sup>1</sup> Здесь и далее понятия «система» и «совокупность» мы обозначаем различными знаками: фигурной и квадратной скобками, поставленными соответственно перед и после выражений.



$$|x| = ? \left[ \begin{array}{l} x_1 = -5 \\ x_2 = 5 \end{array} \right]; (x_1 = -5) \cup (x_2 = 5).$$

2а. Записать решение неравенства в виде системы двух неравенств:

$$|x| < 2; \left\{ \begin{array}{l} ? < ? \\ ? > ? \end{array} \right\}; (? < ?) \cap (? > ?); ? < x < ?.$$

2б. Записать систему двух неравенств в виде одного неравенства:

$$? < ?; \left\{ \begin{array}{l} -1 < x \\ x < 1 \end{array} \right\}; (-1 < x < 1).$$

3а. Заменить неравенство равносильной совокупностью двух неравенств:

$$|x| > 2; \left[ \begin{array}{l} ? > ? \\ ? < ? \end{array} \right]; (? > ?) \cup (? < ?).$$

3б. Заменить совокупность двух неравенств равносильным одним неравенством:

$$? > ?; \left[ \begin{array}{l} x < -4 \\ x > 4 \end{array} \right]; (x < -4) \cup (4 < x).$$

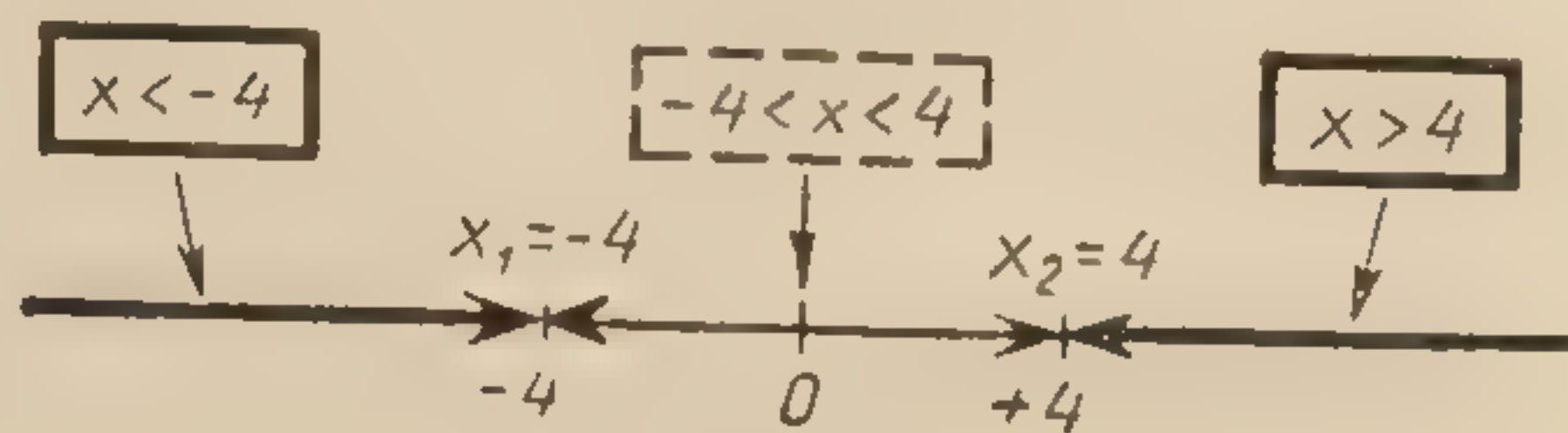


Рис. 38

Полезно также решать упражнения в комплексной записи, иллюстрируя решение на одном рисунке (рис. 38):

$$|x| \geq 4; 1) \left[ \begin{array}{l} x < -4 \\ x > 4 \end{array} \right]; (x < -4) \cup (x > 4).$$

$$2) \left[ \begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{array} \right]; (x_1 = -4) \cup (x_2 = 4).$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} x > -4 \\ x < 4 \end{array} \right\}; (x > -4) \cap (x < 4); (-4 < x < 4).$$

В результате таких упражнений должна быть осмыслена следующая пара суждений:

$$\left[ \begin{array}{l} |x| \geq a, \\ (a > 0) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} x > a \\ -x > a \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array} \right].$$

$$\left[ \begin{array}{l} x < a, \\ -x < a \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{l} x < a, \\ x > -a \end{array} \right].$$



Правило это можно записать так:

Если в неравенстве  $|x| \geq a$  берется знак  $\frac{\text{больше } (>)}{\text{меньше } (<)}$ , то решение сводится к совокупности неравенств, а графически оно представляется в виде  $\frac{\text{двух лучей (бесконечных интервалов)}}{\text{одного отрезка (конечного интервала)}}$ .

Очень важно заметить, что эти соответствующие два упражнения являются равносильными: из первого следует второе, а из второго — первое. Это можно выразить наглядно так:

$$\begin{array}{cc} |x| > a & |x| < a \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} & \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases} \end{array}$$

Следующий этап усложнения заданий — это решение линейных уравнений со знаком модуля. Удобно здесь освоить единый алгоритм их решений методом замены неизвестного.

Пусть дано комплексное упражнение:

$$|x - 1,5| \geq 3.$$

Обозначим:  $y = x - 1,5$ .

Имеем:  $|y| \geq 3$ ; на первых порах пишем намеренно подробно:

$$\begin{array}{l} 1) |y| > 3; \quad \begin{cases} y > 3 \\ -y > 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} y > 3 \\ y < -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 1,5 > 3 \\ x - 1,5 < -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 4,5 \\ x < -1,5 \end{cases} \\ 2) |y| = 3; \quad \begin{cases} y = 3 \\ -y = 3 \end{cases}; \dots\dots \quad \begin{cases} x = 4,5 \\ x = -1,5 \end{cases} \\ 3) |y| < 3; \quad \begin{cases} y < 3 \\ -y < 3 \end{cases}; \dots\dots \quad \begin{cases} x < 4,5 \\ x > -1,5 \\ -1,5 < x < 4,5 \end{cases} \end{array}$$

Приведенная запись показывает подробную схему рассуждений. Впоследствии решение может быть свернуто: решив одно упражнение, мы можем сразу записать ответы двух других упражнений.

Уместно тут же рассмотреть обратную задачу: требуется составить неравенство вида  $|x + a| < b$ , чтобы его решением был конечный промежуток

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 6; \end{cases} \quad \text{или} \quad 4 < x < 6.$$

Преобразуем неравенство последовательно так:

$$\begin{aligned} &|x + a| < b; \\ &-b < x + a < b; \\ &-b - a < x + a - a < b - a; \\ &-b - a < x < b - a. \end{aligned}$$



Должно же быть:  
Значит, имеем:

$$4 < x < 6.$$

$$\begin{cases} -b - a = 4, \\ b - a = 6. \end{cases}$$

Откуда получаем:  $a = -5$ ;  $b = 1$ .

Итак, неравенство  $|x-5| < 1$  имеет решение:  $4 < x < 6$ .

Из этой задачи выводим следствие: решением противоположного неравенства  $|x-5| > 1$  является оставшаяся совокупность областей числовой оси:  $(x < 4) \cup (x > 6)$ .

Пусть теперь требуется составить неравенство вида  $|x+a| > b$ , такое, чтобы оно имело решением не систему, а совокупность областей:  $\left. \begin{array}{l} x < -7 \\ x > 3 \end{array} \right\}$ .

Сначала решим противоположную задачу, а именно составим неравенство  $|x+a| < b$ , решением которого является система неравенств:

$$\begin{cases} x > -7, \\ x < 3; \end{cases}$$

Удобно записать далее так:

$$\begin{aligned} |x+a| &< b \\ -b-a &< x < b-a \\ -7 &< x < 3. \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} -b-a = -7, \\ b-a = 3. \end{cases}$$

Или:  $a = 2$ ;  $b = 5$ .

Тем самым искомое неравенство построено:

$$|x+2| > 5; \left. \begin{array}{l} x < -7 \\ x > 3 \end{array} \right\}.$$

В приведенных упражнениях мы рассматривали простейшие совокупности неравенств, нужные лишь для овладения важными общими понятиями объединения, пересечения множеств.

В традиционной школьной математике, к сожалению, используется лишь понятие «система» (неравенств, уравнений); базируясь на одном понятии «система», невозможно добиться цели ознакомления с общелогическими приемами, восходящими к методам теории множеств.

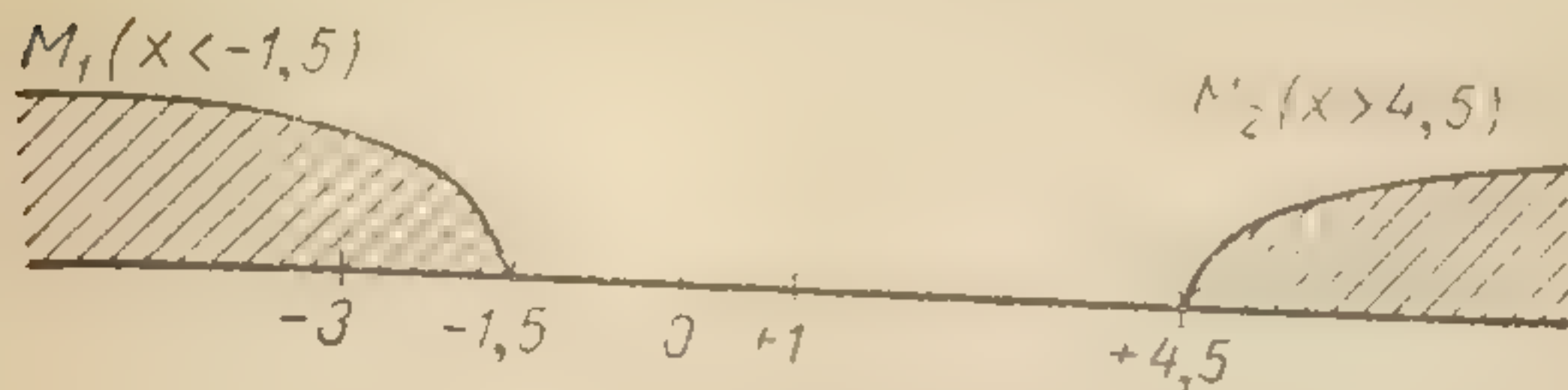
Далее покажем возможности логического обновления упражнений посредством применения метода одновременного использования понятий совокупности и системы неравенств.



Пусть даны два множества точек:

$$M(x < -1,5; x > 4,5) \text{ (рис. 39),}$$

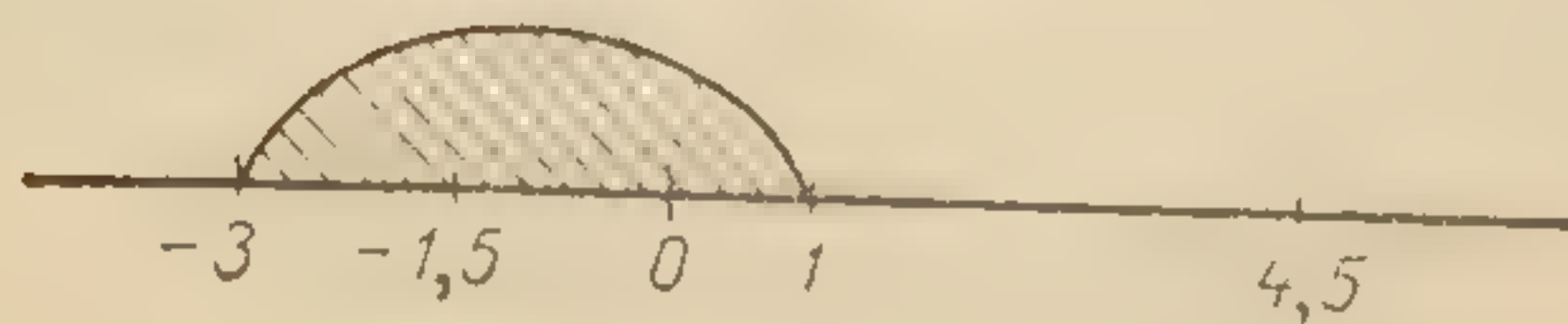
$$N(-3 < x < 1) \text{ (рис. 40)}$$



$$M \equiv M_1 \cup M_2$$

$$M(x < -1,5; x > 4,5)$$

Рис. 39



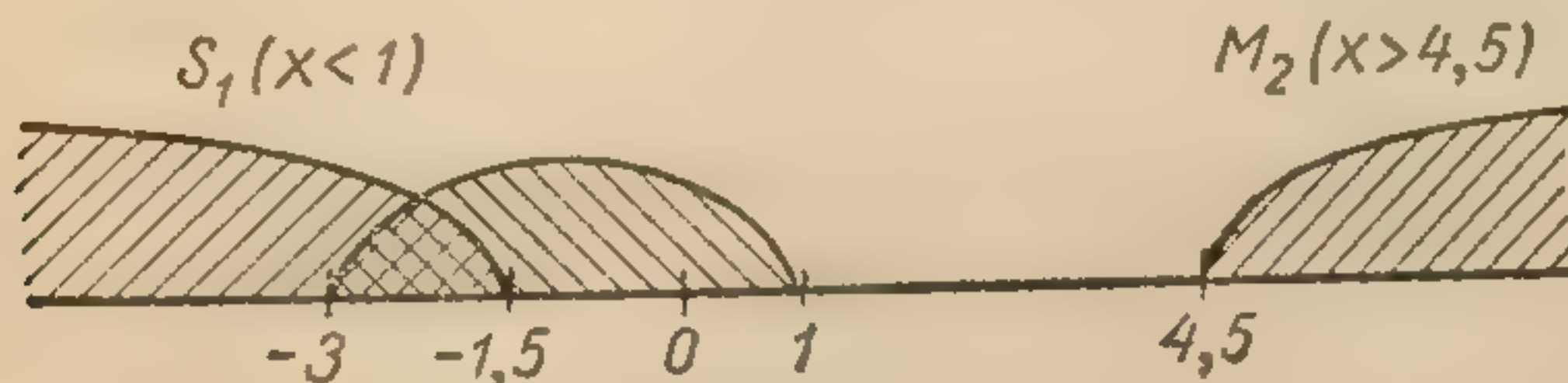
$$N(-3 < x < 1)$$

Рис. 40

Объединение множеств  $M$  и  $N$  охватывает точки, которые находятся хотя бы в одной из областей; обозначим это так:

$$S \equiv M \cup N;$$

$$S \equiv (x < 1) \cup (x > 4,5); \begin{matrix} x < 1 \\ x > 4,5 \end{matrix} \text{ (рис. 41).}$$



$$S \equiv M \cup N$$

$$S \equiv S_1 \cup M_2$$

$$S(x < 1; x > 4,5)$$

Рис. 41

Пересечение этих множеств охватывает точки, которые находятся в обоих множествах одновременно; пересечение множеств обозначим так:

$$R \equiv M \cap N \equiv (-3 < x) \cap (x < -1,5) \equiv R(-3 < x < -1,5);$$

$$\begin{cases} -3 < x, \\ x < -1,5 \end{cases} \text{ (рис. 42).}$$

В символах теории множеств это выглядит так:

$$S \equiv M \cup N \equiv S_1 \cup M_2 \text{ (см. рис. 41).}$$





$$R \equiv M \cap N$$

$$R (-3 < x < -1,5)$$

Рис. 42

Превращение совокупности совокупностей в одну совокупность, которую мы видели в предыдущем решении, в символах теории множеств можно изобразить так:

$$(M_1 \cup M_2) \cup N = M_1 \cup M_2 \cup N \text{ (рис. 43).}$$

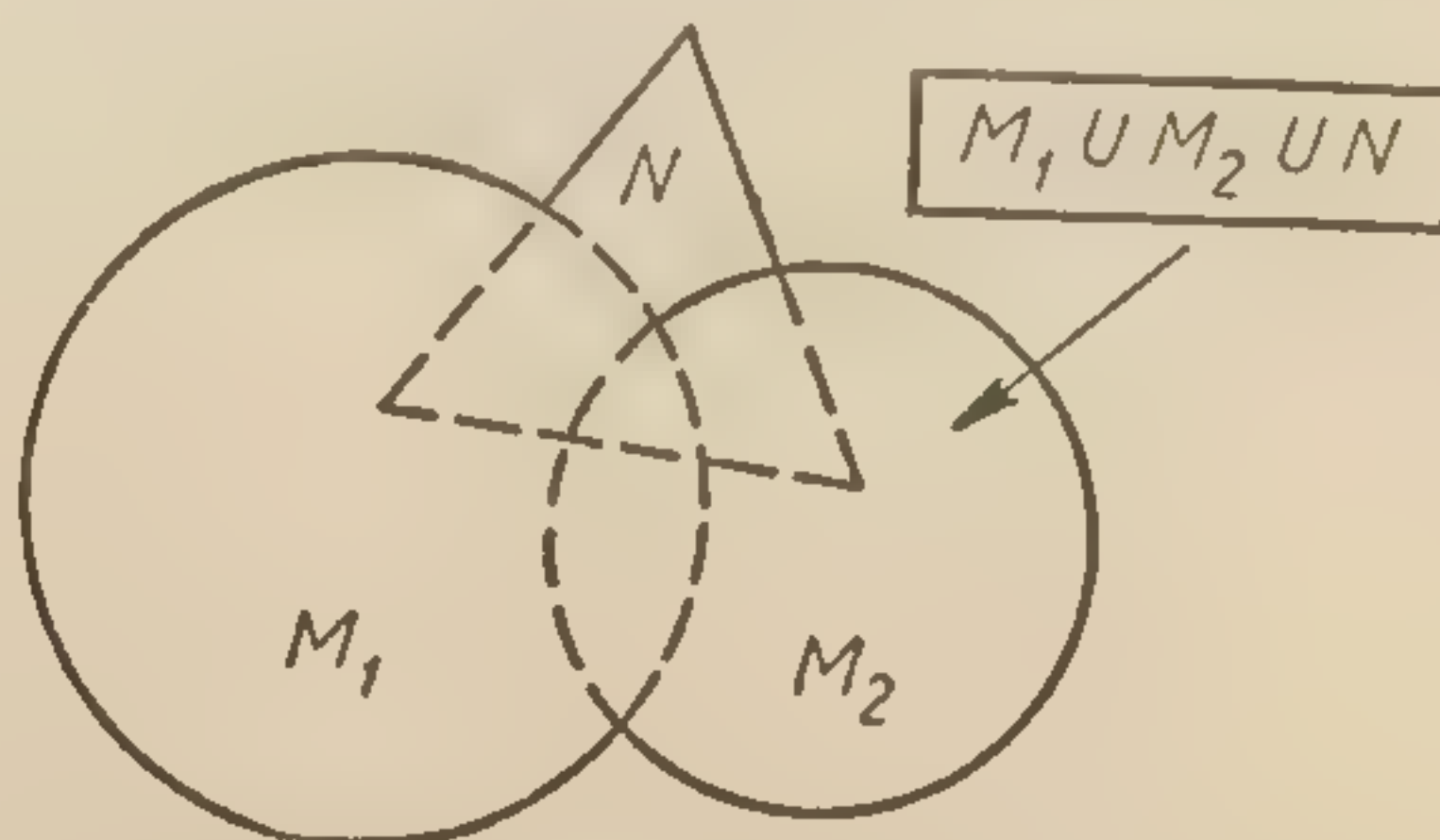


Рис. 43

При решении подобных упражнений может встретиться противоположная операция, когда система систем заменяется одной системой:

$$(M_1 \cap M_2) \cap N = M_1 \cap M_2 \cap N \text{ (рис. 44).}$$

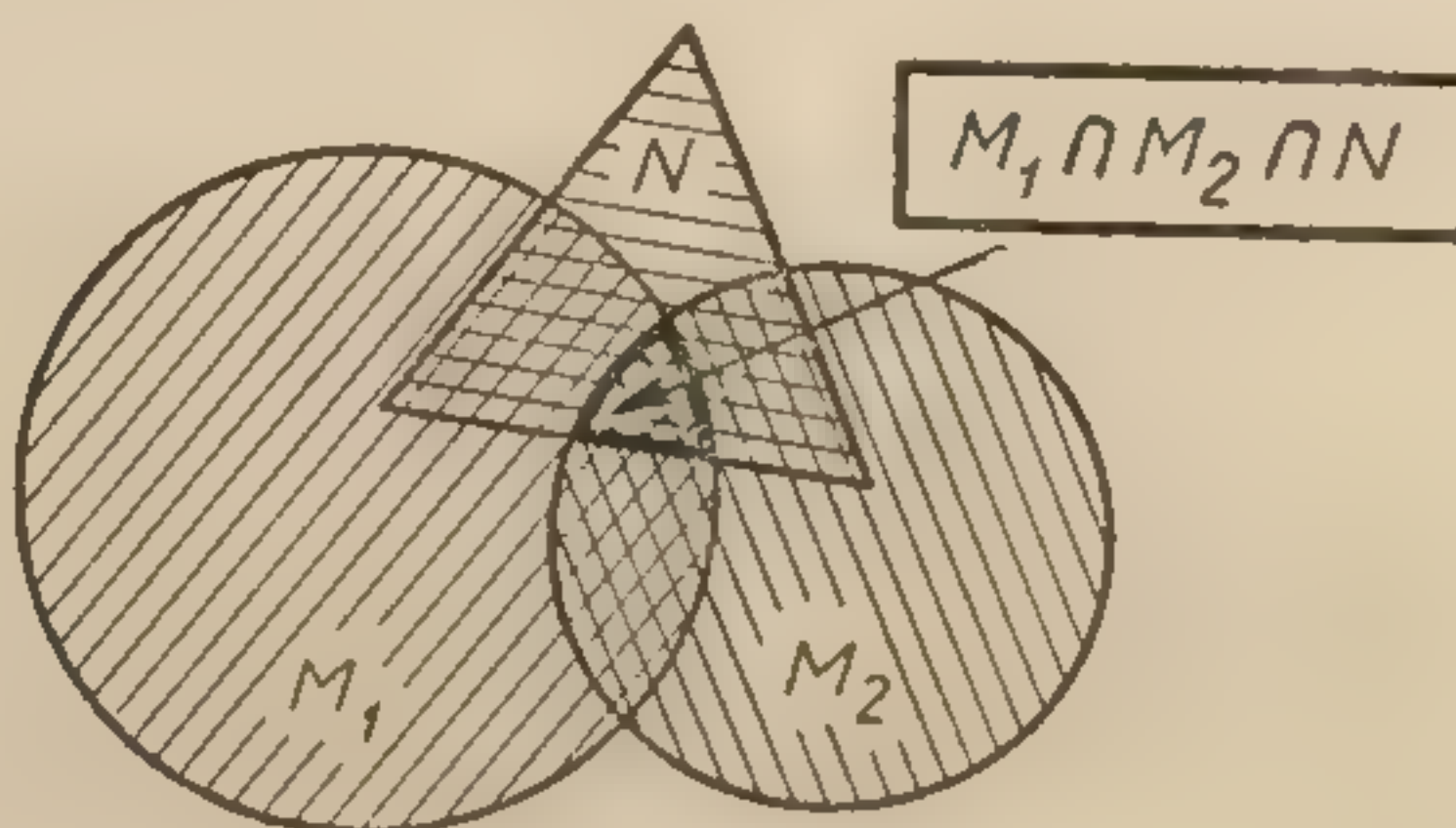


Рис. 44

(Обратим внимание на двойственность этих формул: при взаимозамене двух символов  $\cap \rightleftharpoons \cup$  первое равенство превращается во второе, и наоборот.)

Превращение системы, содержащей совокупность, в совокупность систем, с которыми мы встретились в последнем примере, графически показано наглядно на рисунке 45 и в теории множеств записывается так:



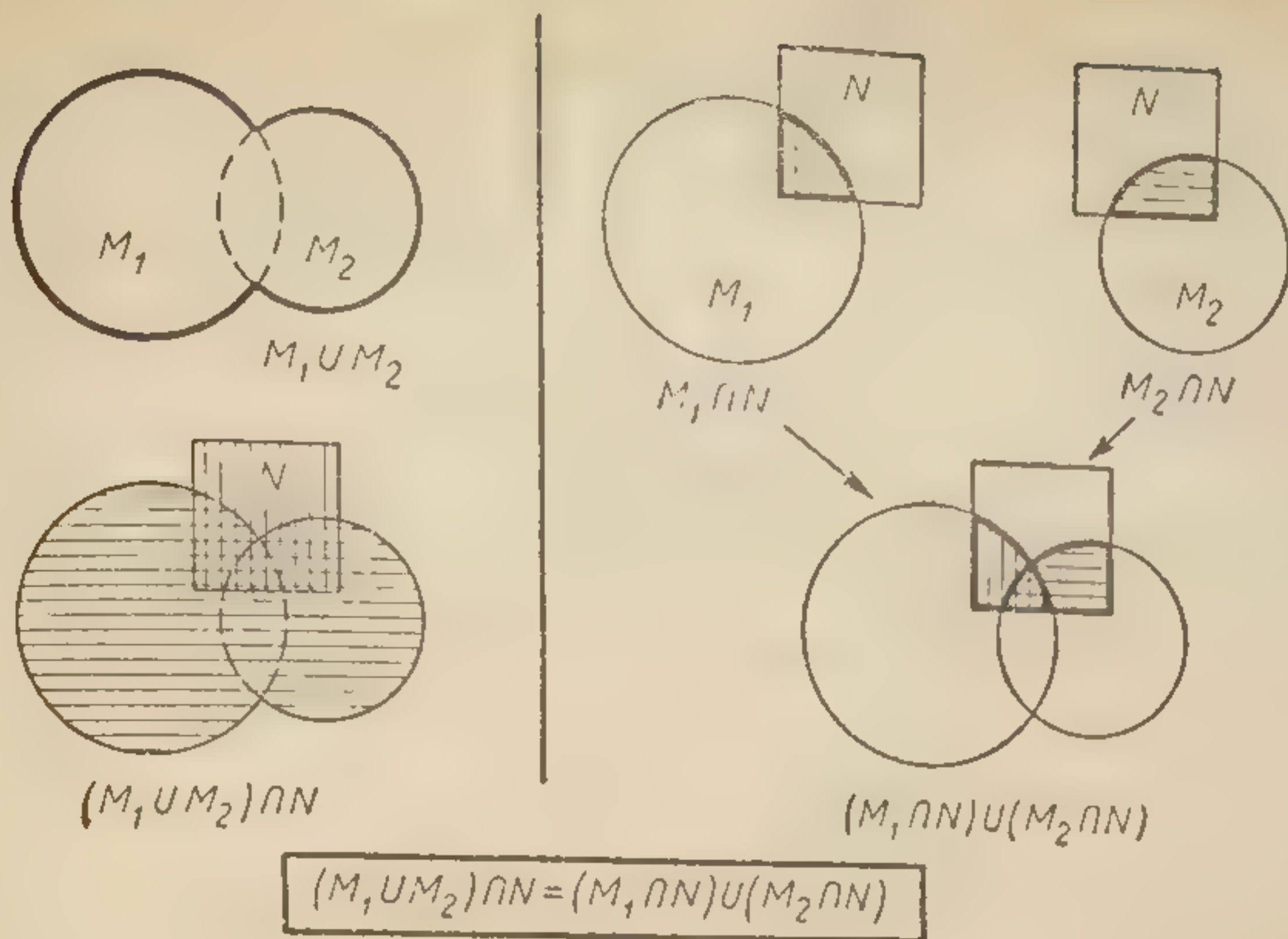


Рис. 45

В символах пересечения и объединения множеств противоположная формула выглядит так (рис. 46):

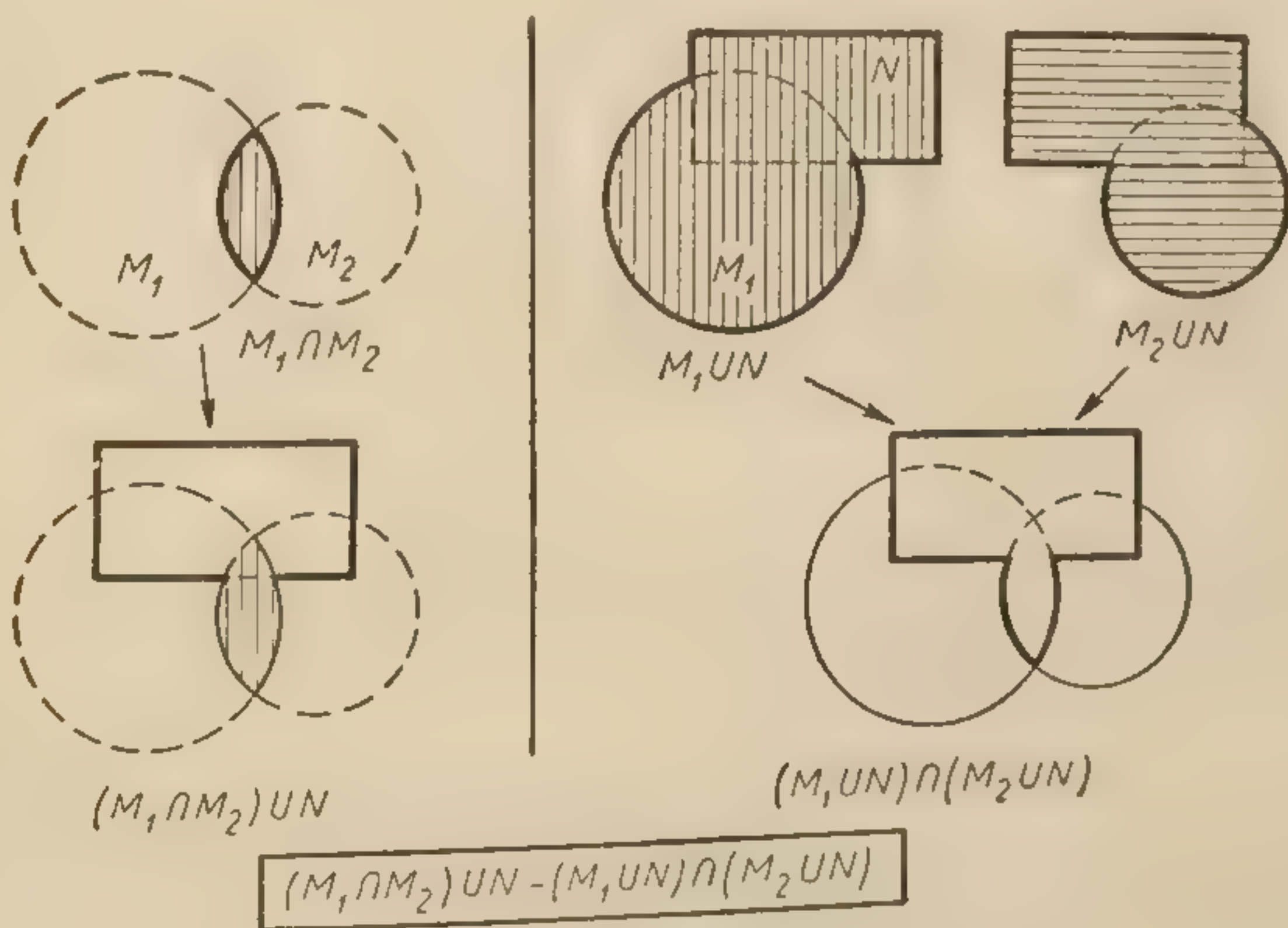


Рис. 46

(Обратим внимание на взаимопревращаемость предыдущей и последней формул при взаимозамене знака пересечения и объединения.)



По рис. 41 легко видеть, что совокупность уравнений

$$\begin{cases} |x - 1,5| = 3 \\ |x + 1| = 2 \end{cases}$$

имеет четыре решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3; & x_3 &= -1,5; \\ x_2 &= 1; & x_4 &= 4,5. \end{aligned}$$

Очевидно, к этой совокупности уравнений сводится уравнение  
 $(|x - 1,5| + 3)(|x + 1| - 2) = 0$ .

По тому же рисунку видим, что система уравнений

$$\begin{cases} |x - 1,5| + 3 = 0, \\ |x + 1| - 2 = 0 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

Возникает законный вопрос: какова польза от подобных аналитических решений, когда на рисунках все это может быть получено гораздо быстрее?

Ответ известен читателю: аналитическое решение оказывается прекрасным средством ознакомления со спецификой некоторых операций теории множеств, с силой ее символики.

Это тем более важно, что теперь с понятиями теории множеств пытаются знакомить школьников уже в начальной школе.

Мы также видим, что различные символы хороши на своем месте: умение переходить от одного к другому содействует важному качеству математического мышления — его формализации.

Отнюдь не случайно при обычном аналитическом решении таких упражнений без специальных символов при всей многословности рассуждений учащиеся все же решают их неуверенно, с ошибками.

### ГЛАВА III

## КВАДРАТНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

### 1. О ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ «КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ»

Ознакомление с новым понятием «квадратное уравнение» в учебниках (а вслед за учебником, конечно, и учителями) обычно проводится в дедуктивной форме.

Так, например, в учебнике А. Н. Барсукова изложение темы начинается сразу с *определения*:

«Уравнение, в котором левая часть — многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая — нуль, называется уравнением второй степени или, короче, квадратным.

В нормальном виде квадратное уравнение записывается так:



$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $a$  — любое неравное нулю число,  $b$  и  $c$  — любые числа, а  $x$  — неизвестное» (А. Н. Барсуков. Алгебра для VI—VIII классов. М., «Просвещение», 1968, стр. 222).

Однако более целесообразным представляется индуктивное введение этого понятия на основе расширения понятия «уравнение первой степени».

Ученикам известно, что замена числового тождества уравнением, не содержащим произведений неизвестных, приводит к уравнению первой степени.

Напишем произвольное числовое тождество:

$$20 - \overline{3} \cdot 5 = 5.$$

Пусть  $x = 3$  (правую часть тождества преобразуем так:  $5 = x + 2$ ), тогда числовое тождество  $20 - \overline{3} \cdot 5 = 5$  преобразуется в уравнение первой степени  $20 - 5x = x + 2$ , которое имеет одно единственное решение: в самом деле, при решении составленного уравнения найдем, что корень равен 3, т. е. числу, заранее намеченному.

Далее учитель ставит проблему: что получится, если мы подобное преобразование числового тождества в уравнение выполним, используя квадрат числа?

Пусть  $x = 3$ ; тогда  $x^2 = 9$ .

Напишем какое-нибудь числовое тождество, используя числа 3 и 9:

$$9 + 3 - 12 = 0;$$

$$3^2 + 3 - 12 = 0.$$

Произведя замену чисел соответствующими неизвестными, получим уравнение *второй* степени:

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

На вопрос, каков же будет корень нового уравнения, учащиеся отвечают:  $x = 3$ .

Однако единственный ли это корень?

Проверкой убеждаемся, что  $x = -4$  тоже удовлетворяет составленному уравнению.

Ученикам есть чему удивиться: намечали одно число в качестве корня, а их оказалось два.

Так выясняется, что уравнение второй степени — *качественно* иное уравнение, чем известное им уравнение первой степени.

У учащихся возникает естественный вопрос: как же все-таки составить такое квадратное уравнение, которое имело бы не один намеченный корень, а два, хотя бы те же самые:  $x = 3$  и  $x = -4$ ?

Напишем два уравнения первой степени, имеющие указанные корни:



$$\begin{aligned}x - 3 &= 0; \\x + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Задача выступает в новом свете: как же два линейных уравнения преобразовать в квадратное?

Перемножим в этих уравнениях отдельно левые и отдельно правые части:

$$(x - 3)(x + 4) = 0 \cdot 0.$$

Получим искомое уравнение второй степени:

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Затем учащиеся самостоятельно формулируют определение понятия «квадратное уравнение».

Итак, целесообразно не начинать, а заканчивать этот урок определением квадратного уравнения, т. е. идти не от анализа готового уравнения, а от синтеза его.

Рассмотренный метод введения сложного уравнения на основе более простого, известного ранее уравнения имеет то логическое достоинство, что обладает общностью.

Полезно показать учащимся, что таким путем можно составить уравнения кубические, четвертой степени и т. д.

$$\begin{aligned}\text{Например: } x_1 &= -1, & x + 1 &= 0; \\x_2 &= -2, & x + 2 &= 0; \\x_3 &= +2, & x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Или: } (x + 1)(x^2 - 4) &= 0; \\x^3 + x^2 - 4x - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Наметив так заранее корни, легко составить уравнения, имеющие сколько угодно корней, но решить произвольное уравнение весьма трудное дело, и эти уравнения изучаются лишь в курсе высшей математики.

После введения понятия «квадратное уравнение» ставится задача найти способ вычисления его корней.

Логичным представляется вывод этого правила разложением левой части на два множителя (ведь квадратное уравнение мы составляли на исходном этапе перемножением двух линейных множителей):

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0; \\a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0; \quad a \neq 0; \\ \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0; \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0; \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 &= 0;\end{aligned}$$

Полезно показывать методом несложного уравнения

$$\text{Или: } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Приведем по

Если нам удастся уравнение решить, то известности квадр

Раскроем с помощью ура

Приравнявая



$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0;$$

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0;$$

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0;$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Полезно показать второй способ решения квадратных уравнений методом неопределенных коэффициентов<sup>1</sup>.

Дано уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ .

$$\text{Или: } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Приведем последнее уравнение к виду:

$$(x + p)^2 - k^2 = 0.$$

Если нам удастся выразить  $p$  и  $k$  через коэффициенты  $b$ ,  $a$ ,  $c$ , то уравнение решается через разложение левой части по формуле разности квадратов.

$$[(x + p) - k] \cdot [(x + p) + k] = 0.$$

$$x + p - k = 0; \quad x_1 = -p + k;$$

$$x + p + k = 0; \quad x_2 = -p - k.$$

Раскроем скобки в искомом выражении и подпишем его под исходным уравнением:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

$$x^2 + 2px + p^2 - k^2 = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при  $x^2$  и  $x$  и свободные члены, имеем:

$$\frac{b}{a} = 2p, \text{ или } p = \frac{b}{2a};$$

$$p^2 - k^2 = \frac{c}{a}, \text{ или } \frac{b^2}{4a^2} - k^2 = \frac{c}{a};$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2;$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}};$$

<sup>1</sup> См. § 2, страницу 205.



$$k_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Подставив в выражения для  $x_1$  и  $x_2$  значение  $p$  и одно из значений  $k$  (например,  $k_2$ ), получим искомые корни:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый способ вывода формулы решения квадратного уравнения строго синтетичен и потому трудно усваивается учащимися; второй же способ подкупает своей аналитичностью, наличием заранее составленного плана (решение разложением левой части по формуле разности квадратов), а также весьма удачно знакомит учащихся с сущностью метода неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов имеет столь важное познавательное значение при своей логической прозрачности, что заслуживает широкого использования в средней школе.

Без него органическое внедрение творческих, синтетических упражнений в практику обучения затруднительно.

При изучении квадратного уравнения весьма просто ввести символы математической логики: знак объединения ( $\cup$ ) и знак пересечения ( $\cap$ ).

Пусть решается система двух уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Бесконечные множества пар чисел, удовлетворяющих каждому уравнению в отдельности, таковы (они суть координаты точек, лежащих на соответствующих прямых линиях):

	$x + y = 8$
$0,5 + 7,5 = 8$	$(0,5; 7,5);$
$1 + 7 = 8$	$(1; 7);$
$2 + 6 = 8$	$(2; 6);$
$6 + 2 = 8$	$(6; 2);$
$7 + 1 = 8$	$(7; 1);$
...	...

	$x - y = 6$
$6 - 0 = 6$	$(6; 0);$
$7 - 1 = 6$	$(7; 1);$
$7,5 - 1,5 = 6$	$(7,5; 1,5);$
$10,5 - 4,5 = 6$	$(10,5; 4,5);$
...	...

Общей парой для обоих множеств является пара чисел  $(7; 1)$ , что и представляет решение системы уравнений (рис. 47).

Поэтому можно сказать: решение системы уравнений есть пересечение множеств групп чисел, удовлетворяющих каждому уравнению в отдельности.

Эту мысль записывают так:  $(x + y = 8) \cap (x - y = 6) = (7; 1)$ .



В противовес: решение квадратного уравнения есть объединение множеств решений, удовлетворяющих каждому из линейных уравнений, на которое оно распадается.

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0;$$

$$\begin{array}{l|l} x - 3 = 0, & x + 4 = 0 \\ (3) & (-4). \end{array}$$

Эту мысль записывают так:

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 12 = 0) &= \\ &= (x - 3 = 0) \cup (x + 4 = 0) = (3; -4). \end{aligned}$$

В данной связи заметим, что постепенное внедрение элементов математической логики в удобных местах в любом классе имеет, несомненно, положительное значение для развития обобщенного мышления, умения формализовать суждения.

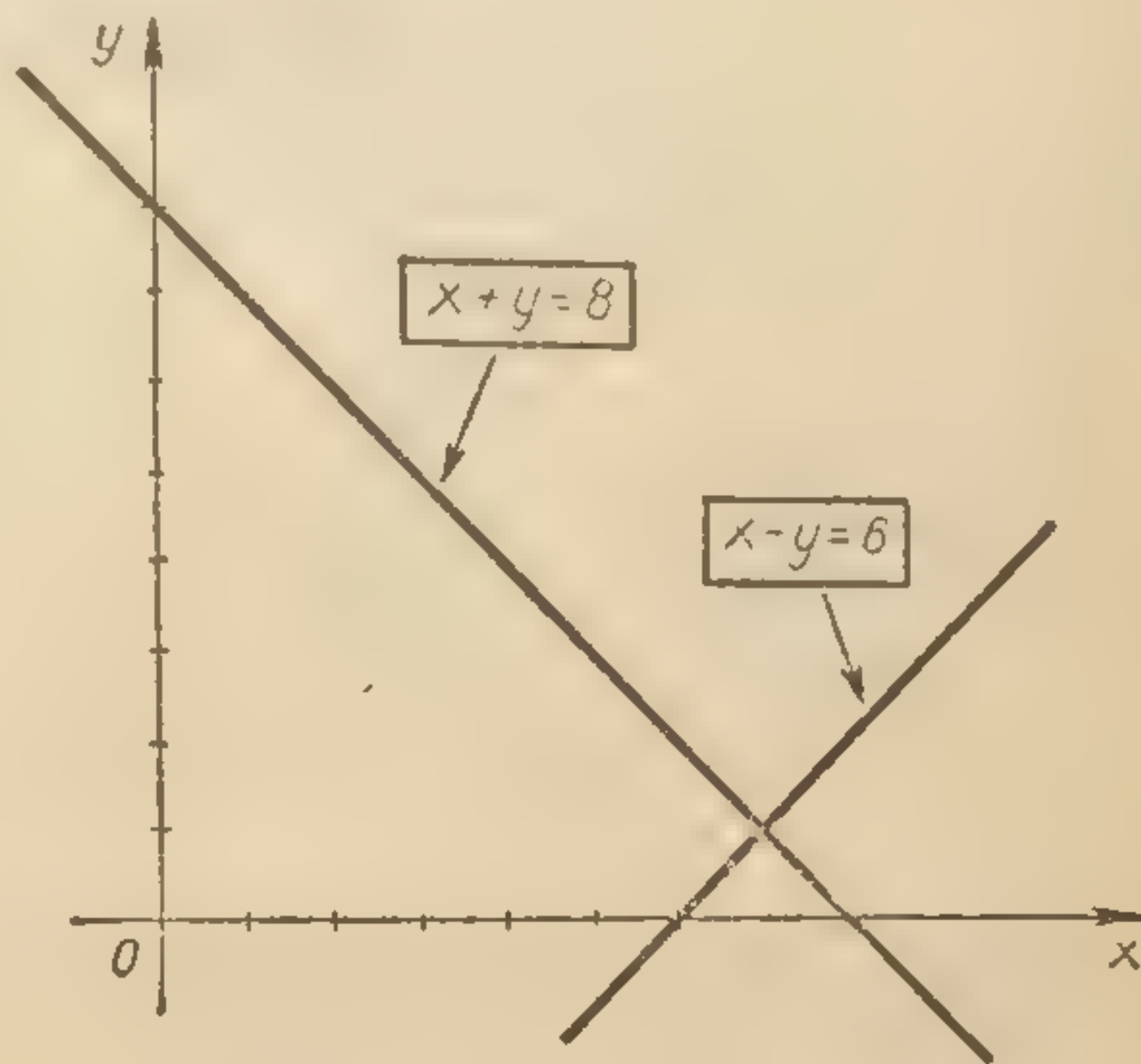


Рис. 47

## 2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К КВАДРАТНЫМ

Выше мы рассматривали способ составления уравнений, обладающих различными свойствами, по аналогии с решенным уравнением; этот прием применим и в данном случае; выполнить это мы предоставляем читателю.

Здесь мы рассмотрим другой путь — составление уравнений методом неопределенных коэффициентов.

Пусть нужно составить уравнение с дробными членами с посторонним корнем  $x = 2$ .

Напишем, например, такое уравнение с неопределенным коэффициентом во втором члене:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{A}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1}.$$

Это уравнение приводится к виду:

$$x^2 + x + A = 3x - 6.$$

Найдем значение  $A$  при  $x = 2$ :

$$4 + 2 + A = 6 - 6; A = -6.$$



Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1}. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет только один корень ( $x = 0$ ); второе значение неизвестного ( $x = 2$ ), получаемое при решении (1), не удовлетворяет этому уравнению.

Найдем значение  $A$  при  $x = -1$ .

$$\begin{aligned} x^2 + x + A &= 3x - 6; \\ 1 - 1 + A &= -3 - 6; \\ A &= -9. \end{aligned}$$

$$\text{Уравнение } \frac{x}{x-2} - \frac{9}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1} \quad (2)$$

имеет один корень:  $x = 3$ ; второй корень  $x = -1$  не удовлетворяет ему.

Составим теперь уравнение, решение которого сводится к квадратному уравнению, причем оба корня его будут посторонними для исходного уравнения.

Пусть искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{C}{(x+1)(x-2)} = \frac{D}{x+1}.$$

Освободившись от знаменателя, имеем:  $x^2 + x + C = Dx - 2D$ . Подставим сюда значения  $x = 2$ ,  $x = -1$ ;

$$\begin{aligned} 4 + 2 + C &= 0; & C &= -6; \\ 1 - 1 + C &= -D - 2D; & -6 &= -3D; \quad D = 2. \end{aligned}$$

Итак, уравнение

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{x+1} \quad (3)$$

не имеет ни одного корня, хотя и приводится к уравнению

$$(x+1)(x-2) = 0.$$

Уравнения (1), (2), (3) охватывают все возможные виды уравнений, приводящихся к квадратным, но не равносильных выводным уравнениям.

Существует много интересных упражнений, связанных с параметрическими уравнениями, приводимыми к квадратным уравнениям.

Среди задач по «Конкурсу выпускников», проводившемуся газетой «Комсомольская правда» (от 2/III 1963 г.) под руководством академика А. Н. Колмогорова, предлагалось решить уравнение

$$(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0. \quad (I)$$



Один из способов решения этого уравнения заключается в том, что уравнение (I) сначала рассматривают как квадратное, но относительно параметров:

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0;$$

$$a^2 - 2(x^2 - 1) \cdot a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0;$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x};$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1};$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm (2x - 1). \quad (\text{II})$$

(III)

Таким образом, уравнение (I) распадается на два квадратных уравнения относительно  $x$ :

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0; \quad (\text{IV})$$

$$x^2 - 2x - a = 0. \quad (\text{V})$$

Решив (IV) и (V), получим корни исходного уравнения:

$$x_{1;2} = -1 \pm \sqrt{a + 3};$$

$$x_{3;4} = 1 \pm \sqrt{a + 1}.$$

О т в е т. Уравнение (I) имеет:

1) четыре действительных корня  $x_1, x_2, x_3, x_4$  при  $-1 \leq a$ ;

2) два действительных корня  $x_1, x_2$  при  $-3 \leq a < -1$ ;

3) не имеет действительных корней при  $a < -3$ .

На занятиях в кружке интересно рассмотреть вопрос о составлении уравнения, подобного уравнению (I), решаемому тем же приемом.

Рассматривая этапы решения, мы видим, что для этого надо начинать с составления выражения вида (III), например:

$$b_{1;2} = x^2 + 2 \pm (3x - 1).$$

Далее записываем два квадратных уравнения с параметром  $b$ :

$$x^2 + 3x - b + 1 = 0;$$

$$x^2 - 3x - b + 3 = 0.$$

Перемножив левые части этих уравнений, получим уравнение четвертой степени:

$$x^4 - (5 + 2b)x^2 + 6x + b^2 - 4b + 3 = 0,$$

$$\text{или } (x^2 - b)^2 - 5x^2 + 6x - 4b + 3 = 0. \quad (1')$$

Уравнение (1') решается тем же приемом, что и уравнение (I).



Среди иррациональных уравнений, приводимых к квадратным, заслуживает внимания еще один вид, достаточно прозрачный для анализа.

Речь идет об уравнениях, которые можно привести к виду:  $y^2 + a_1y + a_2 = 0$ , где  $y$  в свою очередь представляет квадратный трехчлен:  $y = b_1x^2 + b_2x + b_3$ .

Пусть дано уравнение

$$x^2 - 2x + 4 + \sqrt{x^2 - 2x + 6} = 10 \quad (I)$$

Если бы решали это уравнение освобождением от радикала, то получили бы уравнение четвертой степени. Поступим иначе.

(Читаем сверху вниз.)

Обозначим:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 6} = y \quad (y \geq 0). \quad (II)$$

$$\text{Тогда } x^2 - 2x + 6 = y^2.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4 + 6 - 4 &= y^2; \\ x^2 - 2x + 4 &= y^2 - 2. \end{aligned} \quad (III)$$

Подставив (II) и (III) в исходное уравнение (I), имеем:

$$\begin{aligned} y^2 - 2 + y &= 10, \text{ или} \\ y^2 + y - 12 &= 0; \\ (y + 4)(y - 3) &= 0; \\ \begin{cases} y_1 = -4; \\ y_2 = +3. \end{cases} \end{aligned}$$

Условию (II) удовлетворяет лишь второй корень.

Имеем далее:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 6 &= 3; \\ x^2 - 2x - 3 &= 0; \\ (x - 1)(x + 3) &= 0; \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = -3. \end{aligned}$$

Уравнение (I) имеет эти два корня.

Сравнивая уравнения (I) и (Ia), видим: первое имеет два действительных корня, второе — четыре действительных корня, среди которых находятся намеченные корни.

Предлагаем читателю составить уравнение вида (I), чтобы оно имело четыре заданных решения, например:

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 4.$$

Пусть теперь требуется составить уравнение вида (I), такое, чтобы его действительными корнями были числа:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -2.$$

Решая уравнения (I), получим следующую последовательность операций (читаем снизу вверх):

$$x^2 - 2x - 8\sqrt{x^2 - 2x - 4} + 8 = 0. \quad (Ia)$$

Уравнение (Ia) получено:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 - \\ - 8\sqrt{x^2 - 2x - 4} + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Заменим в нижнем выражении  $y^2$  и  $y$  через (IIIa) и (IIa):

$$\begin{aligned} y^2 - 8y + 12 &= 0; \\ (y - 6)(y - 2) &= 0; \\ y_1 &= 6 \quad (\text{вводим лишний корень}); \\ y_2 &= 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x - 4} &= y; \quad (IIa) \\ x^2 - 2x - 4 &= y^2. \quad (IIIa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 &= 2^2; \\ x^2 - 2x - 8 &= 0; \\ (x - 4)(x + 2) &= 0; \\ x_1 &= 4, \quad x_2 = -2. \end{aligned}$$



### 3. О КЛАССИФИКАЦИИ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Правильная и исчерпывающая классификация изучаемых понятий имеет существенное значение для запоминания и вспоминания материала (таблица на стр. 210).

По приведенной классификации полезно приводить логические упражнения.

Например, следует обратить внимание на симметрические случаи относительно характеристики корней; таковы случаи (II) и (III), (IV) и (V), (VI) и (VIII), (IX) и (X).

Можно, например, учащемуся предложить следующие задания:

а) П р я м а я   з а д а ч а .

О квадратном уравнении известно:

$$\Delta > 0; \quad c > 0; \quad b < 0.$$

По формулам для корней выяснить знаки корней этого уравнения.

б) О б р а т н а я   з а д а ч а .

Известно, что уравнение удовлетворяет следующим условиям:

$$x_1 > 0; \quad x_2 < 0; \quad |x_1| > |x_2|.$$

Определить знаки коэффициентов и дискриминанта, пользуясь формулами корней квадратного уравнения.

Для решения обратной задачи возможно выразить параметры уравнения,  $b$ ,  $c$ ,  $\Delta$  через корни:

$$b = -(x_1 + x_2);$$

$$c = x_1 \cdot x_2;$$

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2.$$

Решения подобных задач иногда можно осуществить в форме поиска по схеме классификации с последующей проверкой подробным решением.

Данная нами классификация квадратных уравнений является одновременно и классификацией квадратных трехчленов с точки зрения характеристики корней соответствующего уравнения (всего насчитывается 11 существенно различных случаев).

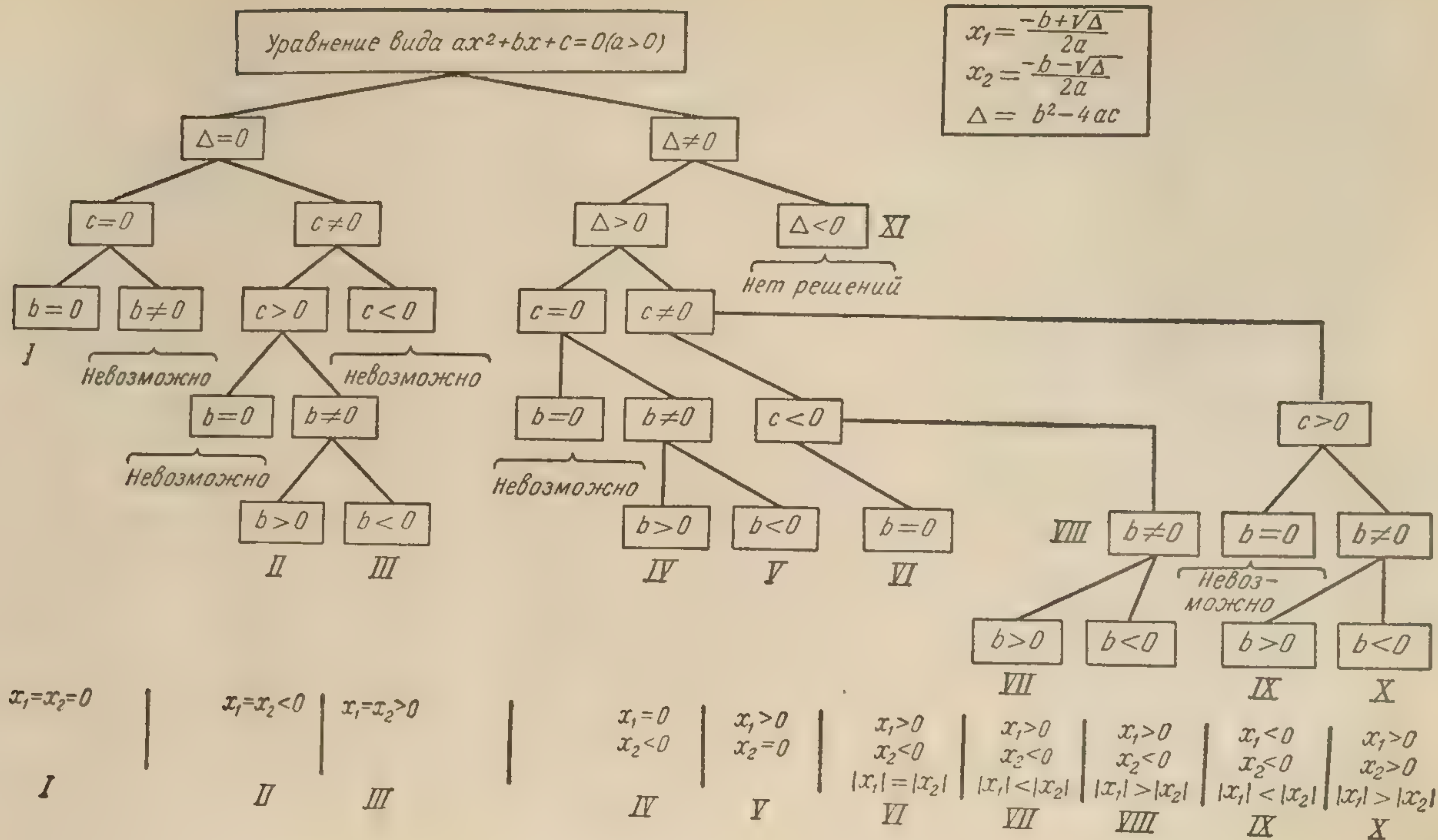
При изучении вопроса об исследовании квадратного уравнения полезно выполнить следующее логическое упражнение.

Пусть дан квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  и его дискриминант  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Перефразируем известные теоремы о свойствах квадратного трехчлена так:

1. Если  $\Delta > 0$ , то трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  принимает значение, равное нулю в двух точках.





$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Структуру теоремы  $A \rightarrow B$ , что в термин 1)  $A$  является 2)  $B$  является Два последних теоремы  $A \rightarrow B$  в практике а суждение Поэтому е некоторого п найти достатк требование о заключению Говоря п ворять смыс Однако е словоупотребл найти достатк цессе решени для  $B$  (В - Сущности мера. В журна статья А. Г

3. Если  $1=$   
2. Если  $1=$   
1. Если  $u \neq 0$ .  
II. Если  $u$   
III. Если  $u$   
Обратные  
Покажем,  
Дано, что  
нужно в двух  
Требуется  
Допустим,  
а)  $\Delta = 0$ ,  
в одной точке,  
б)  $\Delta < 0$ ,  
вен нулю ни  
Остается п  
В литерату  
тремя «необхо  
задачи).



2. Если  $\Delta = 0$ , то  $y = 0$  только в одной точке.  
3. Если  $\Delta < 0$ , то ни в одной точке трехчлен не равен нулю ( $y \neq 0$ ).

Сформулируем обратные предложения:

I. Если  $y$  принимает значение, равное нулю в двух точках, то  $\Delta > 0$ .

II. Если  $y = 0$  в одной точке, то  $\Delta = 0$ .

III. Если трехчлен не равен нулю ни в одной точке, то  $\Delta < 0$ .

Обратные теоремы доказываются методом от противоречащего. Докажем, например, предложение (1):

Дано, что квадратный трехчлен принимает значение, равное нулю в двух точках.

Требуется доказать, что дискриминант больше нуля.

Допустим, что это не так. Тогда возможны два случая:

а)  $\Delta = 0$ , но тогда согласно прямой теореме (2)  $y = 0$  только в одной точке, что противоречит условию.

б)  $\Delta < 0$ , но тогда согласно прямой теореме (3) трехчлен не равен нулю ни в одной точке, что опять противоречит условию.

Остается принять, что  $y = 0$  в двух точках.

В литературе иногда встречаются ошибки, связанные с понятиями «необходимые» и «достаточные» условия (прямая и обратная задачи).

Структуру любой задачи или теоремы можно изобразить в форме:  $A \rightarrow B$ , что означает: *если дано (известно)  $A$ , то выполняется  $B$* .

В терминах необходимости и достаточности это означает:

- 1)  $A$  является достаточным условием для существования  $B$ ;
- 2)  $B$  является необходимым условием для существования  $A$ .

Два последних суждения выражают содержание одной и той же теоремы  $A \rightarrow B$ .

В практике обучения принято называть суждение  $A$  условием, а суждение  $B$  — заключением теоремы.

Поэтому если речь идет о нахождении условия для выполнения некоторого положения  $B$ , то логично это понимать как требование найти достаточные условия для выполнения  $B$ , иначе говоря, как требование определить условие  $A$  в умозаключении  $A \rightarrow B$  (по заключению  $B$  восстановить условие  $A$ ).

Говоря по-другому, найденное положение  $A$  должно удовлетворять смысловому обороту: *если  $A$ , то  $B$* .

Однако в литературе часто встречается логически нечеткое словоупотребление, когда по точному смыслу вопроса требуется найти достаточные условия  $A$  для  $B$  ( $A \rightarrow B$ ), а вместо этого процесс решения сводится к нахождению необходимых условий  $C$  для  $B$  ( $B \rightarrow C$ ).

Сущность этой ошибки покажем на разборе одного примера.

В журнале «Математика в школе» (1960, № 1, стр. 66) помещена статья А. Г. Бекназаряна «Об одном виде устных упражнений на



квадратные уравнения». В этой статье доказывается следующее любопытное свойство квадратного уравнения:

«Если  $a + b + c = 0$ , то один из корней уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  равен единице ( $x_1 = 1$ ), другой корень равен отношению коэффициентов ( $x_2 = \frac{c}{a}$ ). Доказать это просто. Положив  $x_1 = 1$ , получим:  $ax_1^2 + bx_1 + c = a + b + c = 0$ ;

$$x_1 x_2 = x_2 = \frac{c}{a} \text{ »}.$$

Приведенное доказательство неверно, ибо в нем доказывается не то предложение, которое следует доказать, а ему обратное.

Доказательство должно быть таким: дано  $ax^2 + bx + c = 0$  (I). По условию  $a + b + c = 0$  (II). Из (II) определим  $c$  ( $c = -a - b$ ) и подставим в (I):

$$a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)(ax + a + b) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{-a - b}{a} = \frac{c}{a}.$$

#### 4. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ИССЛЕДОВАНИЕМ

Решение параметрических уравнений целесообразно в отдельных случаях доводить до конца, т. е. завершать исследование. С этой целью полезно показать ученикам всю градацию усложнения задания, исходя из простейших форм уравнения.

1. Пусть дано уравнение

$$2(a - 3x) = 3(x - a). \quad (I)$$

$$\text{Ответ. } x = \frac{5a}{9}. \quad (I')$$

Уравнение (I) не имеет знаменателя, и поэтому нет исходных ограничений для параметра  $a$ .

В выражении для корня уравнения (I') параметр содержится только в числителе, поэтому нет и дополнительных ограничений, накладываемых на параметр.



2. Усложним уравнение (I) так, чтобы появились исходные ограничения, связанные со структурой уравнения. Для этого достаточно уравнение задать, скажем, в форме:

$$\frac{2}{x-a} = \frac{3}{a-3x}. \quad (II)$$

Знаменатели уравнения (II) не могут равняться нулю. Поэтому исходные ограничения будут следующие:

$$x-a \neq 0, \text{ или } x \neq a; \quad (A)$$

$$a-3x \neq 0; \text{ или } x \neq \frac{a}{3}. \quad (B)$$

Ответ.  $x = \frac{5a}{9}$  (II) при ограничениях (A) и (B). В ограничениях (A) и (B) связаны значения неизвестного и параметра.

Надо же исследование уравнения доводить до получения ограничений, наложенных только на параметры.

Чтобы добиться этого, надо значение корня  $x = \frac{5a}{9}$  подставить в исходные ограничения (A) и (B).

Имеем:  $x \neq a$  (A).

Тогда  $\frac{5a}{9} \neq a$ .

Отсюда  $a \neq 0$ .

То же самое получим из второго ограничения:  $x \neq \frac{a}{3}; \frac{a}{3} \neq \frac{5a}{9}, a \neq 0$ .

Таким образом, вместо двух «предварительных ограничений» (A) и (B) имеем одно «конкретное ограничение»  $a \neq 0$  (A).

Ответ.  $x = \frac{5a}{9}$  при  $a \neq 0$ .

3. Усложним уравнение (II) так, чтобы, кроме исходных ограничений (A) и (B), появилось дополнительное ограничение (C).

Для этого уравнение (II) заменим таким уравнением (III), чтобы в выражении для корня параметр  $a$  попадал в знаменатель.

Пусть мы составили следующее уравнение:

$$\frac{2}{x-a} = \frac{3+a}{a-3x}. \quad (III)$$

$$\text{Ответ. } x = \frac{a^2+5a}{a+9}. \quad (III')$$

Для уравнения (III) существуют те же «предварительные ограничения» (A) и (B).

Кроме того, из формы выражения для корня (III') получаем дополнительное ограничение:  $a+9 \neq 0; a \neq -9$  (C).



Затем предварительные ограничения (A) и (B) приведем к конкретным ограничениям.

Имеем:  $x \neq a$ , (A). Тогда  $\frac{a^2+5a}{a+9} \neq a$ ;  $a^2+5a \neq a^2+9a$ ;  
 $a \neq 0$ .

То же самое получаем из ограничения (B).

Итак, окончательно:

Уравнение (III) имеет корень (III') при  $a \neq -9$  (C) и  $a \neq 0$  (A').

При изучении квадратных уравнений в VIII классе достаточно ограничиваться исследованием уравнений с одним параметром, например таких:

1)  $2x^2 - 6ax + 10 = 0$ ;

2)  $x^2 - 8x + c = 0$ .

В методической литературе иногда встречаются неточности при изложении вопроса о решении уравнений с исследованием.

В книге К. С. Богушевского и К. П. Сикорского «Методические указания к преподаванию алгебры и геометрии в VIII классе» (Учпедгиз, 1958) рассматривается решение следующего уравнения:

$$\frac{2a+m}{a+x} - \frac{2a-m}{a-x} = \frac{2a}{m}.$$

Ответ.  $x_{1,2} = m \pm a$ .

Далее авторы книги пишут следующее:

При решении этого уравнения «недостаточно указать, что решение производится при условии  $x \neq \pm a$  и  $m \neq 0$ . Решение уравнения приводит к  $x = m \pm a$ .

Подстановка этих корней в общий знаменатель  $m(a+x)(a-x)$  дает дополнительное условие:  $m \neq \pm 2a$ » (подчеркнуто мною. — П. Э.).

Отметим следующие неточности в этом указании:

Условия  $x \neq a$  (A);  $x \neq -a$  (B) являются по нашей терминологии предварительными ограничениями, наложенными по существу не на параметр  $a$ , а на значения корня (значения неизвестного  $x$ ).

Подставив в эти неравенства корни  $x_1 = m + a$ ;  $x_2 = m - a$ , мы получаем не дополнительные ограничения, как считают авторы книги, а конкретизацию тех же ограничений, а именно:

при подстановке  $x_1$  в (A) получаем ограничение:  $m \neq 0$  (C);

при подстановке  $x_2$  в (A) получаем:  $m \neq 2a$  (A');

при подстановке  $x_1$  в (B) получаем:  $m \neq -2a$  (B);

при подстановке  $x_2$  в (B) получаем:  $m \neq 0$  (C).

Таким образом, ограничения  $m \neq 2a$  (A'),  $m \neq -2a$  (B') являются лишь иным выражением тех же ограничений (A) и (B),



связывающих между собой не  $x$  и  $a$ , а сами параметры  $m$  и  $a$ .  
Понятно также, что значение корня правильнее подставлять не в общий знаменатель  $(a + x)(a - x)$ , а в предварительные ограничения (A) и (B).

Приводим полный ответ к этому уравнению, который не дан в упоминавшейся книге.

1. Начнем с того, что при решении исходного уравнения приходится обе части производного уравнения делить на  $2a$ ; тем самым последующие рассуждения относятся к случаю  $a \neq 0$ .

Если же положить  $a = 0$ , то исходное уравнение вырождается в следующее тождество:

$$\frac{m}{x} - \frac{-m}{-x} = \frac{0}{m},$$

$$\text{или } \frac{m}{x} - \frac{m}{x} = 0.$$

Таким образом, при  $a = 0$  уравнение

$$\frac{2a + m}{a + x} - \frac{2a - m}{a - x} = \frac{2a}{m}$$

имеет бесчисленное множество решений ( $x$  — любое число).

2. При  $m \neq 2a$ ,  $m \neq -2a$ ,  $m \neq 0$  уравнение имеет два корня:  
 $x_1 = m + a$ ;  $x_2 = m - a$ .

3. При  $m \neq 0$ ,  $m = 2a$  уравнение имеет один корень:  
 $x_1 = m + a = 3a$ .

4. При  $m \neq 0$ ,  $m = -2a$  уравнение имеет один корень:  
 $x_2 = m - a = -3a$ .

5. При  $m = 0$  уравнение не имеет ни одного корня.

Чтобы учащиеся поняли различие этих частных случаев, упомянуто иногда предложить им подобрать параметры, соответствующие этим случаям, например:

1. Пусть  $m = 2$ ,  $a = 3$ . Имеем уравнение  $\frac{8}{3+x} - \frac{4}{3-x} = 3$ ;  
корни:  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -1$ .

Здесь корни вычислены без решения исходного уравнения по общему выражению корней ( $x_1 = m + a$ ;  $x_2 = m - a$ ).

2. Пусть  $m = 2$ ,  $a = 1$ , тогда  $\frac{4}{1+x} = 1$  имеет один корень:  
 $x_1 = 3$ .

При этих значениях параметра исходное уравнение вырождается и корень  $x_2$  выпадает.



## 5. СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ.

Как известно, систему двух уравнений, одно из которых второй степени, а другое первой степени, всегда можно решить элементарно, например подстановкой значения одного неизвестного, определенного из линейного уравнения, в другое.

Рассмотрим обратную задачу о составлении системы, имеющей определенные решения.

Пусть требуется составить систему вида

$$\begin{cases} ax^2 + xy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ mx + ny + k = 0 \end{cases}$$

так, чтобы она имела решение:  $x_1 = -2$ ,  $y_1 = 1$ .

Чтобы выполнить это задание, достаточно написать два числовых тождества с учетом значений неизвестных при произвольных коэффициентах:

$$\begin{cases} (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (+1) + 0 \cdot (+1)^2 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (+1) = 3, \\ 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (+1) = -4. \end{cases}$$

Далее преобразуем систему тождеств в систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y = 3, \\ 3x + 2y = -4. \end{cases}$$

Решив составленную систему, получим намеченное решение:  $(x_1 = -2, y_1 = +1)$  и, кроме того, второе решение, которое нами не было намечено заранее.

Поскольку первое решение системы было выбрано в поле рациональных чисел, то и второе решение должно состоять также из рациональных чисел.

Пусть решена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \frac{x-2}{y-3} = 1. \end{cases}$$

Ответ. (3, 4) и (1, 2).

Затем ученикам можно предложить составить систему того же вида, причем одно из ее решений должно быть (5, 6.)

Учащиеся конструируют по аналогии два числовых тождества:

$$\begin{cases} (|\bar{5}| - 3)(|\bar{6}| - 2) = 8, \\ \frac{|\bar{6}| - 2}{|\bar{5}| - 3} = 2. \end{cases}$$

Затем пишут соответствующую систему уравнений:



$$\begin{cases} (x - 3)(y - 2) = 8, \\ \frac{y - 2}{x - 3} = 2. \end{cases}$$

Решив составленную систему, ученики убеждаются в том, что действительно одним из решений системы оказывается намеченная пара чисел (5; 6).

Кроме того, находится второе решение (1; -2), которое мы заранее не намечали.

## 6. СОСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Алгебраическое выражение называется симметрическим относительно  $x$  и  $y$ , если числовые значения его не меняются от перестановки  $x$  и  $y$ .

Таковы, например, выражения:

$$x + y; x^2 + y^2; 3x - 2xy - 3y; \frac{x+1}{2y} + \frac{y+1}{2x} \text{ и др.}$$

Уравнение вида  $F(x, y) = a$ , где  $a$  — параметр, назовем симметрическим, если левая часть его представляет симметрическое выражение относительно  $x$  и  $y$ .

Систему, состоящую из симметрических уравнений, назовем также симметрической.

В школьном курсе алгебры решается значительное число симметрических систем.

Пусть учащиеся решили симметрическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12 \end{cases}$$

и получили ответ: (8; 4) и (4; 8).

Можно им предложить составить систему такого же вида, но чтобы решениями были, скажем, пары чисел: (6; 3) и (3; 6).

Сначала составим два числовых тождества:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \\ 6 + 3 = 9. \end{cases}$$

Заменяя числа 6 и 3 буквами  $x$  и  $y$ , получаем симметрическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ x + y = 9. \end{cases}$$



Решения симметрической системы тоже симметричны (т. е. соответствуют координатам точек, симметричных относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов).

Циклично-симметрической назовем систему двух уравнений, одно из которых получается из другого при помощи перестановки неизвестных  $x$  и  $y$ .

Общий вид циклично-симметрической системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными таков:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey &= M; \\ ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex &= M. \end{aligned} \quad (I)$$

Циклично-симметрические системы двух уравнений второй степени решаются очень просто, и поэтому они должны занять свое место в школьных упражнениях по алгебре.

Для решения системы (I) вычтем одно уравнение из другого:  
 $a(x - y)(x + y) - c(x - y)(y + x) + d(x - y) - e(x - y) = 0.$

Все слагаемые имеют общий множитель  $(x - y)$ , и поэтому

$$\begin{aligned} (x - y)[a(x + y) - c(y + x) + d - e] &= 0; \\ (x - y)[(a - c)(x + y) + d - e] &= 0. \end{aligned}$$

Решив каждое из линейных уравнений  $x - y = 0$  и  $(a - c)(x + y) + d - e = 0$  совместно с одним из уравнений системы (I), мы найдем четыре решения исходной системы.

Уравнения циклично-симметрической системы соответствуют взаимно обратным функциям.

График обратной функции, как известно, получается из графика прямой функции путем поворота чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла.

Поэтому рассматриваемые системы очень просто решаются не только аналитически, но и графически.

Как легко видеть, два решения (из четырех) системы (I) состоят из равных значений неизвестных ( $x_1 = y_1$ ;  $x_2 = y_2$ ); они соответствуют точкам пересечения графиков взаимно обратных функций, лежащим на биссектрисе первого координатного угла.

Составим систему вида (I), имеющую решением, например,  $x_1 = y_1 = -2$ .

Напишем произвольное числовое выражение и, подсчитав его значение, превратим в тождество

$$2 \cdot (-2)^2 - 3(-2) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) - (-2) = -10.$$

Легко написать теперь искомую систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 4x - y = -10, \\ 2y^2 - 3xy + 4y - x = -10. \end{cases} \quad (II)$$

**Решение.** Вычтем второе уравнение из первого:



$$\begin{cases} 2(x-y)(x+y) + 5(x-y) = 0, \\ (x-y)(2x+2y+5) = 0. \end{cases}$$

Решение системы (II) сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2x^2-3xy+4x-y=-10. \end{cases} \quad (\text{IIa})$$

$$\begin{cases} 2x+2y+5=0, \\ 2x^2-3xy+4x-y=0. \end{cases} \quad (\text{IIб})$$

Ответ. (5; 5) и (-2; -2);

$$\left( \frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4} \right) \text{ и } \left( \frac{-5+\sqrt{17}}{4}, \frac{-5-\sqrt{17}}{4} \right). \quad (\text{III})$$

## 7. СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ, ЛЕВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ ОДНОРОДНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО $x$ и $y$

Рассмотрим вопрос о составлении системы двух уравнений второй степени, левые части которых являются однородными выражениями относительно  $x$  и  $y$  (т. е. таких, у которых в левой части имеются члены лишь вида  $ax^2$ ,  $bx^2$ ,  $cxy$ , а в правой части — постоянные числа).

Сначала пронаблюдаем, какой последовательностью операций решается такая система:

$$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4. \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{Ia}) \\ (\text{Iб}) \end{matrix}$$

Умножив обе части уравнения (Ia) на (-2) и сложив их с соответствующими частями уравнения (Iб), получим:

$$3y^2-2x^2+5xy=0. \quad (\text{II})$$

Поделим обе части на  $xy$  ( $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ ):

$$3 \cdot \frac{y}{x} - 2 \cdot \frac{x}{y} + 5 = 0. \quad (\text{III})$$

Решив уравнение (III) посредством подстановки  $\frac{y}{x} = z$ , найдем следующие четыре решения: (3; 1), (-3; -1); (2;  $2\sqrt{2}$ ) и (-2;  $-2\sqrt{2}$ ), т. е. корням уравнений с однородной левой частью соответствуют координаты точек, симметричных относительно начала координат.

Теперь рассмотрим, как же составить систему однородных уравнений второй степени с заранее намеченными четырьмя корнями.

Для этого проведем преобразования в обратном порядке.



Пусть корнями составляемой системы должны быть следующие пары чисел:  $(\pm 2; \pm 1)$  и  $(\pm 4; \pm 3)$ .

Пусть первое уравнение будет  $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ , где  $a, b, c, d$  — постоянные числа.

Это уравнение должно иметь два решения:  $(2; 1)$  и  $(4; 3)$ .

Если оно имеет решения  $(2; 1)$  и  $(4; 3)$ , то, как следствие этого, оно будет иметь также решения  $(-2; -1)$  и  $(-4; -3)$ .

По указанным двум условиям надо определить четыре коэффициента:  $a, b, c, d$ .

Соответственно два из них мы сможем наметить произвольно. Пусть  $c_1 = 1; d_1 = 4$ , тогда

$$\begin{cases} a_1 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 = 4, \\ a_1 \cdot 4^2 + b_1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 = 4. \end{cases}$$

Из этой системы определяем:  $a_1 = \frac{23}{8}; b_1 = -\frac{17}{4}$ .

Итак, искомое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{23}{8}x^2 - \frac{17}{4}xy + y^2 &= 4, \\ \text{или } 23x^2 - 34xy + 8y^2 &= 32. \end{aligned} \quad (1a)$$

Для наших целей необходимо составить еще одно уравнение вида  $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2$  с иными, чем уравнение (1a), коэффициентами, но с теми же корнями.

Итак, пусть  $c_2 = 2; d_2 = 3$ :

$$\begin{cases} a_2 \cdot 4 + b_2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3, \\ a_2 \cdot 16 + b_2 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a_2 + 2b_2 = 1, \\ 16a_2 + 12b_2 = -15. \end{cases}$$

Отсюда определяем коэффициенты:  $a_2 = \frac{21}{8}; b_2 = -\frac{19}{4}$ .

Второе уравнение системы будет следующее:

$$\begin{aligned} \frac{21}{8}x^2 - \frac{19}{4}xy + 2y^2 &= 3, \\ \text{или } 21x^2 - 38xy + 16y^2 &= 24. \end{aligned} \quad (1b)$$

Итак, система уравнений

$$\begin{cases} 23x^2 - 34xy + 8y^2 = 32, \\ 21x^2 - 38xy + 16y^2 = 24 \end{cases}$$

имеет заданные корни:  $(\pm 2; \pm 1)$  и  $(\pm 4; \pm 3)$ .



## 8. О РАЗЛОЖЕНИИ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Разложение квадратного трехчлена на множители, как известно, является составной частью решения задач по построению графика квадратной функции и их исследования.

Пусть требуется разложить на множители трехчлен  $x^2 - 8x + 15$ .  
1-й способ. Решим уравнение  $x^2 - 8x + 15 = 0$ ;

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15}; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 3;$$

$$x^2 - 8x + 15 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 5)(x - 3).$$

2-й способ (традиционный) сводится к выделению полного квадрата:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= (x^2 - 8x + 16) - 16 + 15 = (x - 4)^2 - 1 = \\ &= [(x - 4) - 1] \cdot [(x - 4) + 1] = (x - 5)(x - 3). \end{aligned}$$

Как это ни удивительно, но выделение полного квадрата часто приводит к большому числу ошибок учащихся.

3-й способ — это метод неопределенных коэффициентов.

Дан квадратный трехчлен  $x^2 - 8x + 15$ ; представим его в виде  $(x + p)^2 - k^2$ .

$$\text{Итак, } x^2 - 8x + 15 = (x + p)^2 - k^2;$$

$$x^2 - 8x + 15 = x^2 + 2px + p^2 - k^2.$$

Приравнявая коэффициенты при  $x$ , имеем:

$$-8 = 2p, \text{ или } p = -4.$$

Приравнявая свободные члены, имеем:

$$15 = p^2 - k^2;$$

$$15 = 16 - k^2;$$

$$k^2 = 1.$$

Имеем дальше:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= (x + p)^2 - k^2 = (x - 4)^2 - 1^2 = \\ &= [(x - 4) - 1] \cdot [(x - 4) + 1] = (x - 5)(x - 3). \end{aligned}$$

Пусть дан трехчлен  $x^2 - 6x + 15 = x^2 + 2px + p^2 - k^2$ .

Тем же методом получим:  $p = -3$ ;  $15 = p^2 - k^2 = 9 - k^2$ ;  $k^2 = -6$ .

Но квадрат числа не может быть отрицательным, значит, квадратный трехчлен  $x^2 - 6x + 15$  неразложим на множители.

Упражнения по разложению квадратного трехчлена методом неопределенных коэффициентов весьма полезны для изучения последующего материала (построение графика квадратного трехчлена и его исследования).



## 9. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ НА ОСНОВАНИИ СВОЙСТВ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

При решении многих задач, как алгебраических, так и геометрических, приходится определять наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена.

Пусть дан квадратный трехчлен  $y = -x^2 + 10x - 17$ .

Требуется определить: при каком значении  $x$  данный трехчлен достигает максимума?

Для решения задачи преобразуем квадратный трехчлен, выделив из него полный квадрат:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 10x - 17 = -(x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25) + \\ &\quad + 25 - 17 = -(x - 5)^2 + 8 = 8 - (x - 5)^2; \\ y &= 8 - (x - 5)^2. \end{aligned}$$

Правая часть представлена в виде разности, причем уменьшаемое (8) — постоянное число, вычитаемое  $(x - 5)^2$  — переменная величина,  $y$  — разность.

Разность будет наибольшей, если вычитаемое наименьшее, т. е. равно нулю. Имеем при  $x - 5 = 0$  ( $x = 5$ ):  $y_{\max} = 8 - 0 = 8$ .

Итак,  $y_{\max} = 8$  при  $x = 5$ .

Способ этот, основанный на выделении полного квадрата, оказывается для учащихся достаточно трудным из-за обилия преобразований.

Наиболее удобным, в силу прозрачности, способом решения этой задачи оказался опять метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 10x - 17; \\ y &= -(x + p)^2 + k; \\ y &= -x^2 - 2px - p^2 + k. \\ -2p &= 10; \quad p = -5; \\ -p^2 + k &= -17; \\ -25 + k &= -17; \quad k = 8. \end{aligned}$$

Итак, имеем:  $y = 8 - (x - 5)^2$ .

Остальное ясно.

Рассмотрим обратную задачу: пусть требуется составить какую-нибудь квадратичную функцию, которая, скажем, имеет минимум ( $y_{\min} = 10$ ) в точке  $x = 3$ .

Искомая функция будет следующая:

$$y = 10 + (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 19.$$

Функция  $y = 10 - (x - 3)^2 = -x^2 + 6x + 1$  имела бы в той же точке  $x = 3$  максимум, равный 10 ( $y_{\max} = 10$ ).

В существующих построениях графика квадратного трехчлена) при переносе с осей координат. Сущность этого метода.

1. Трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  в направлении оси ординат на

При этом методе

не трех единичных

1) параболы

2) затем параболы

3) и, наконец, параболы

оси ординат.

Кроме того, значения функции

строения графика

Как показывает

другой метод, ординат. Рассчитайте

этим методом.

На первом этапе

функции, дан график

Подчеркивая

1. Вершину (максимуму и

2. График функции четной

чений и построения

3. Если а > 0, то вершина

Теперь рассмотрим

1. Дан квадратный



## 10. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В существующих учебниках алгебры при объяснении способа построения графиков функций (в том числе и графика квадратного трехчлена) применяется прием, который мы назовем методом переноса графика.

Сущность этого метода, как известно, сводится к следующему:

1. Трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  преобразуют в

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

2. Составляют таблицу значений координат нескольких точек.

3. Посредством сравнения значений координат, т. е. в основном индуктивным путем устанавливается, что график трехчлена  $y = ax^2 + bx + c$  можно получить, передвинув график функции  $y = x^2$  в направлении оси абсцисс на  $\left( \frac{b}{2a} \right)$  единиц и в направлении оси ординат на  $\left( \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  единиц.

При этом методе приходится тратить много времени на построение трех одинаковых кривых, а именно:

- 1) параболы  $y = ax^2$ ;
- 2) затем параболы, смещенной в направлении оси абсцисс;
- 3) и, наконец, той же параболы, смещенной в направлении оси ординат.

Кроме того, при этом способе приходится составлять таблицу значений функции для каждого нового случая; общий прием построения графика здесь появляется лишь в конце изучения темы.

Как показывает практика, более целесообразным оказывается другой метод, который можно назвать *методом переноса осей координат*. Рассмотрим построение графика квадратного трехчлена этим методом.

На первом уроке, как обычно, знакомим с построением графика функции, данной каноническим уравнением  $y = ax^2$ .

Подчеркиваются следующие особенности графика:

1. Вершина параболы, соответствующая экстремуму функции (максимуму или минимуму), совпадает с началом координат.
2. График функции симметричен относительно оси  $OY$ , так как функция четная (это устанавливается составлением таблицы значений и построением графика по точкам).

3. Если  $a \geq 0$ , то ветви параболы соответственно направлены  $\frac{\text{вверх}}{\text{вниз}}$ , а вершина параболы является точкой  $\frac{\text{минимума}}{\text{максимума}}$  функции.

Теперь рассмотрим общий случай.

1. Дан квадратный трехчлен

$$y = ax^2 + bx + c.$$

(I)



2. Приведем его к виду:

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2, \text{ или} \quad (\text{II})$$

$$\bar{y} = k\bar{x}^2, \text{ где} \quad (\text{III})$$

$$\bar{y} = y - y_0, \quad (\text{IV})$$

$$\bar{x} = x - x_0.$$

3. Раскроем скобки в уравнении (II):

$$y = kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 + y_0. \quad (\text{V})$$

4. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в уравнениях (I) и (V), найдем значения параметров:

$$a = k$$

$$b = -2kx_0; \quad b = -2ax_0; \quad x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$c = kx_0^2 + y_0; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

5. Уравнение (III) приобретает вид:

$$\bar{y} = a\bar{x}^2, \quad (\text{IIIa})$$

или

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2. \quad (\text{IIIб})$$

6. Находим координаты точки  $\bar{O}$  (начала новой системы координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  относительно прежней системы  $XOY$ ).

Точка  $\bar{O}$  в системе  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  имеет нулевые координаты:

$$\bar{O} (\bar{x} = 0; \bar{y} = 0).$$

Подставим эти значения в формулы (IV):

$$\bar{O} \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{O} \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Итак, мы получили координаты точки  $O$  в основной системе координат:

$$\bar{O} \left( x = -\frac{b}{2a}; y = \frac{4ac - b^2}{4a} \right). \quad (\text{VI})$$

7. Строим основную систему координат  $XOY$ .

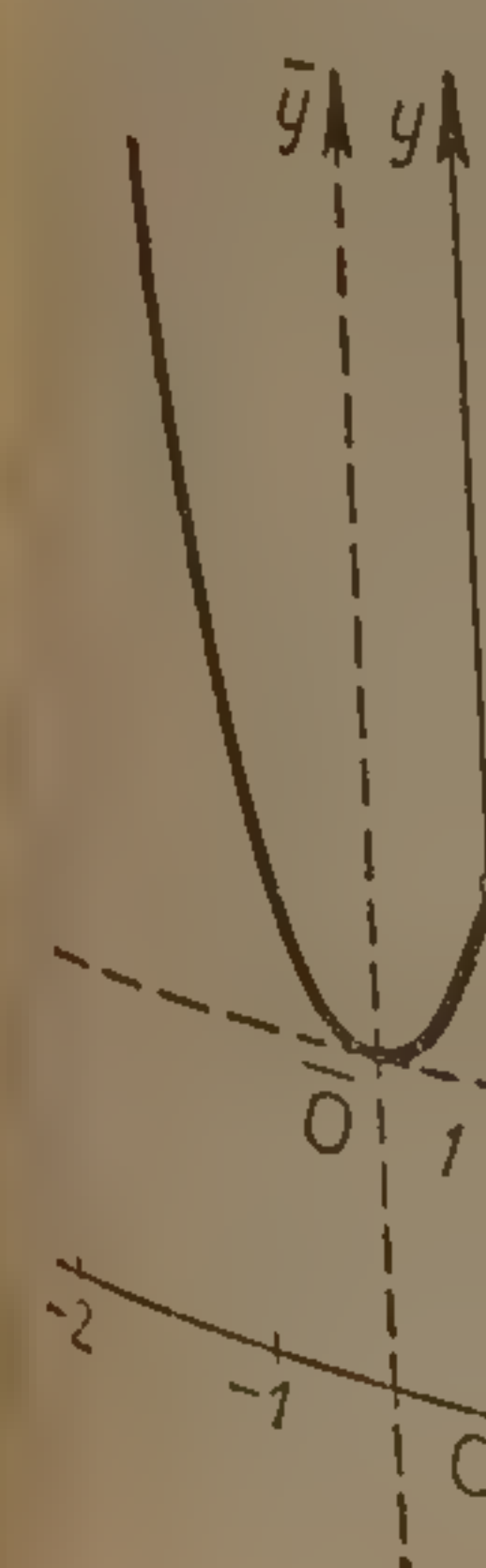
8. Находим точку  $\bar{O}$  (начало новой системы координат) по VI.

9. Строим вспомогательную систему координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  ( $\bar{O}\bar{X} \parallel OX$ ;  $\bar{O}\bar{Y} \parallel OY$ ).

10. Во вспомогательной системе координат строим по (IIIa) график функции  $\bar{y} = a\bar{x}^2$ .

Таким образом, построение графика любого квадратного трехчлена сводится к построению параболы по формуле стандартного (канонического) вида:  $\bar{y} = a\bar{x}^2$ .

Рассмотрим п...  
Пусть трехчлен  
 $3x^2 - 3x + 2$   
2) Преобразуем  
 $3x^2 - 3x + 2 = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$   
Найдем значения параметров:  $k = 3$ ;  
4. Строим параболу. Начало координат  
При этой системе координат  
квадратного трехчлена



8 Заказ 542



По точкам на основе составления таблицы строится только парабола вида  $\bar{y} = a\bar{x}^2$ ; все остальные операции приведенного алгоритма заучиваются и выполняются в неизменной последовательности.

Рассмотрим пример.

1) Пусть требуется построить график квадратного трехчлена  $y = 3x^2 + 3x + 2$ . (I)

2) Преобразуем это уравнение:

$$\bar{y} = k\bar{x}^2. \quad (\text{II})$$

$$3) y - y_0 = k(x - x_0)^2;$$

$$y = kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 + y_0.$$

Найдем значения параметров методом неопределенных коэффициентов:  $k = 3$ ;  $-2 \cdot k \cdot x_0 = 3$ ;  $-6 \cdot x_0 = 3$ ;  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ;

$$kx_0^2 + y_0 = 2;$$

$$3 \cdot \frac{1}{4} + y_0 = 2; \quad y_0 = \frac{5}{4}.$$

4. Строим параболу  $\bar{y} = 3\bar{x}^2$  во вспомогательной системе координат. Начало этой вспомогательной системы  $O$  имеет координаты:

$$x = x_0 = -\frac{1}{2};$$

$$y = y_0 = \frac{5}{4} \quad (\text{рис. 48}).$$

При этой методе сразу рассматривается построение графика квадратного трехчлена для общего случая.

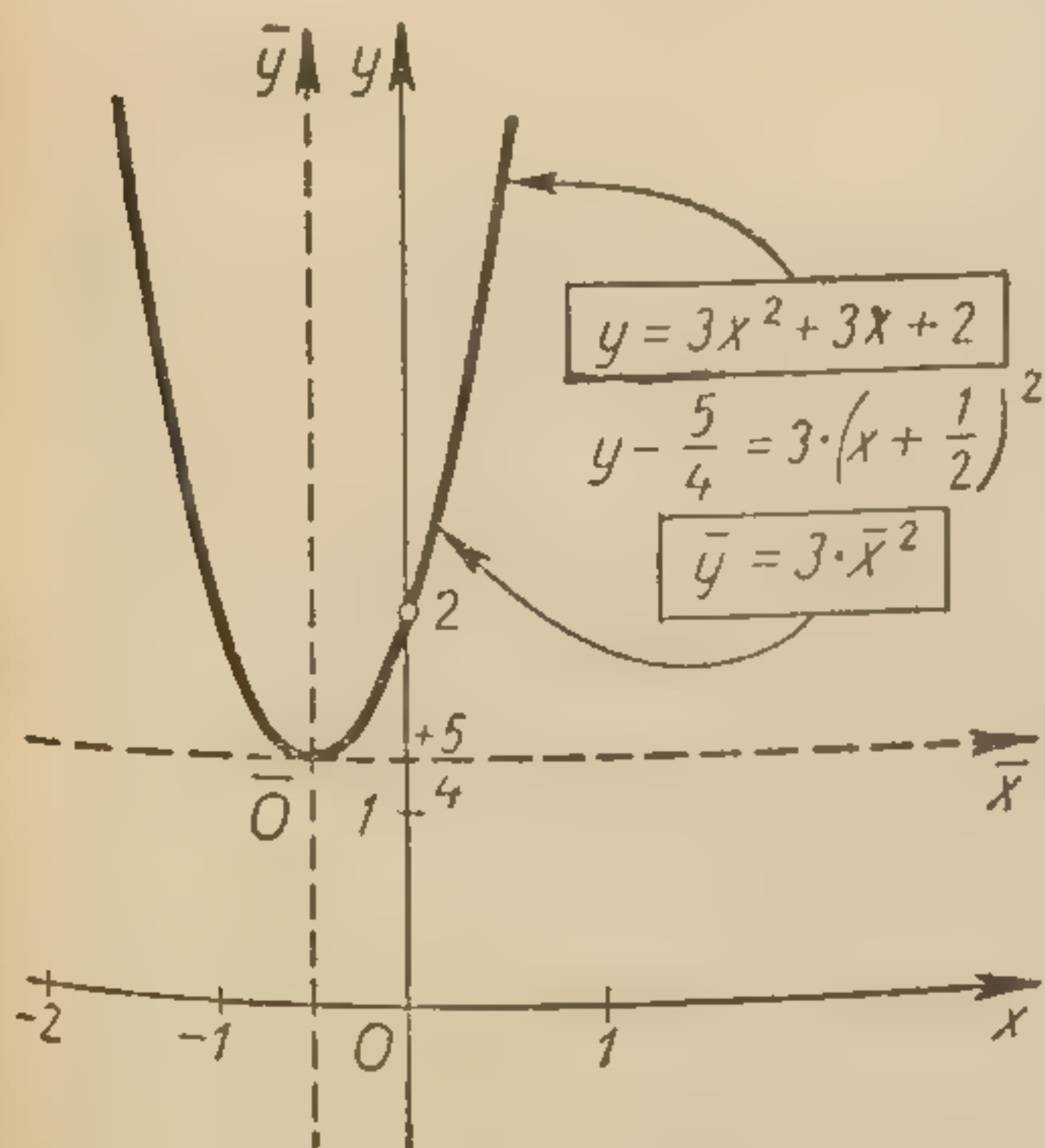


Рис. 48

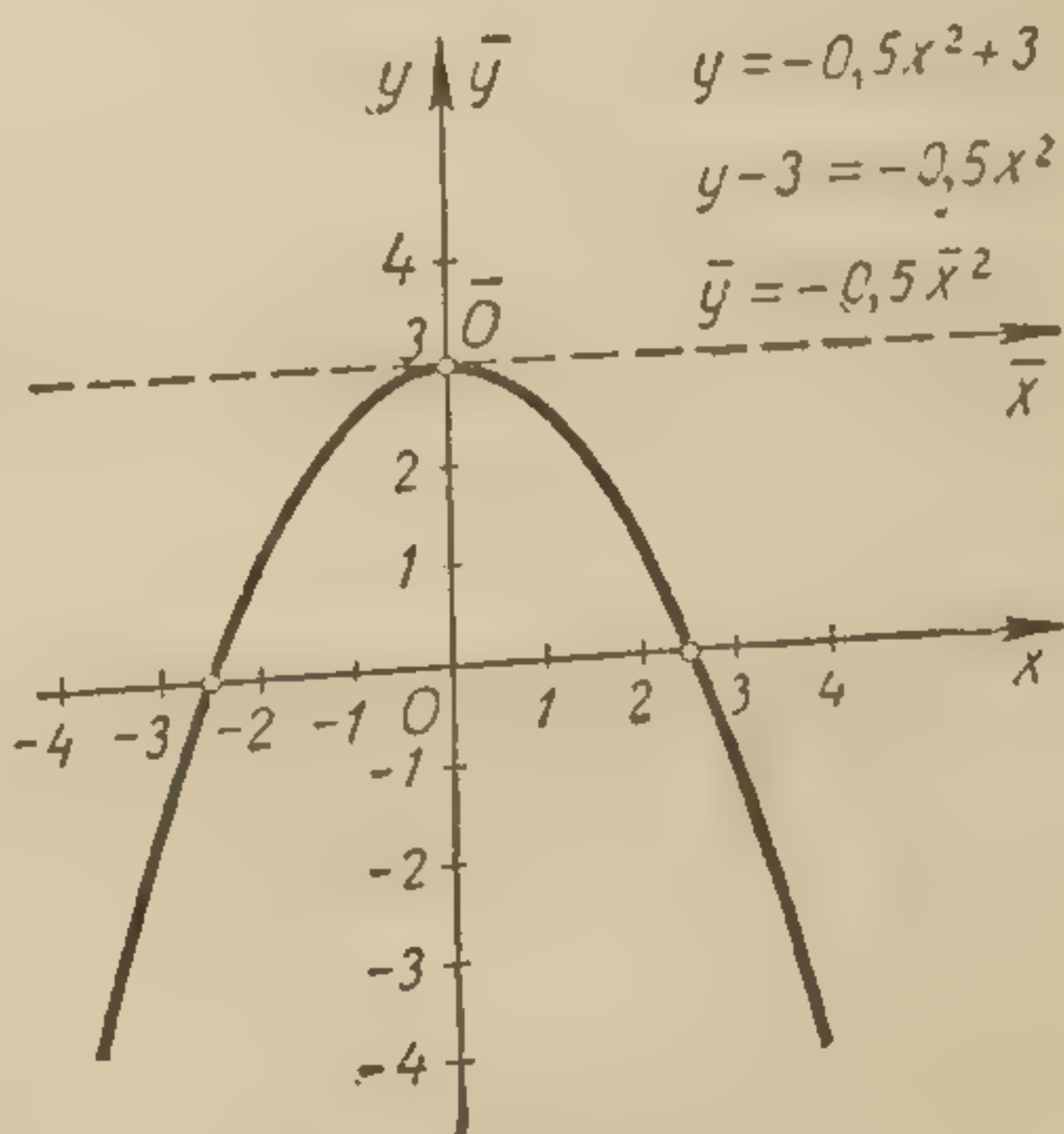


Рис. 49



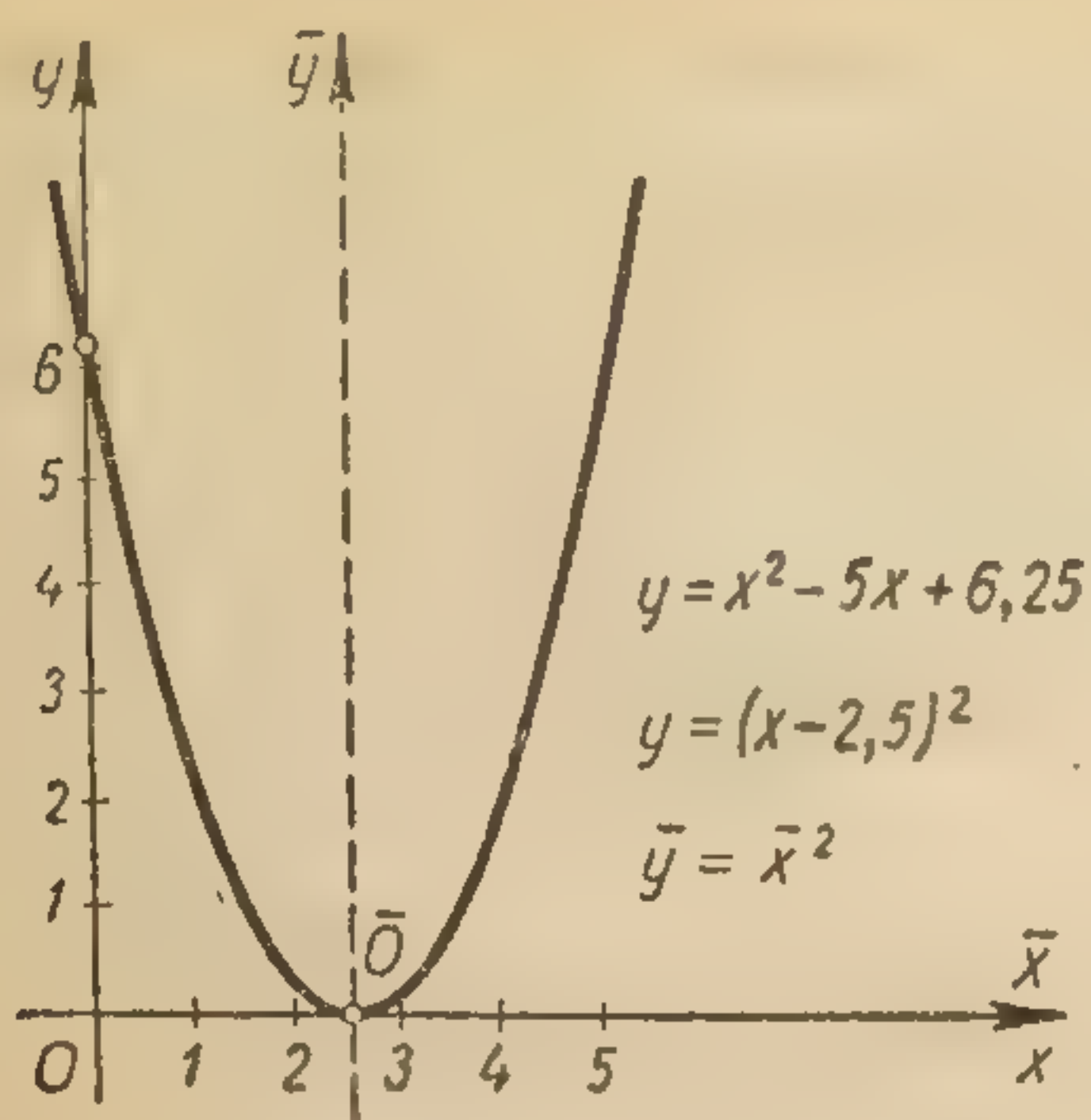


Рис. 50

Построение графиков в так называемых частных случаях осуществляется тем же приемом.

Требуется построить график следующей функции: (рис. 49)

$$y = -0,5x^2 + 3. \quad (1)$$

Перепишем его так:  $y - 3 = -0,5x^2.$  (2)

Введем новые переменные:

$$y - 3 = \bar{y}; \quad \bar{x} = x. \quad (3)$$

Перепишем уравнение (2):

$$\bar{y} = -0,5\bar{x}^2. \quad (4)$$

Строим основную систему координат  $XOY$ .

Строим точку  $\bar{O}$  ( $y - 3 = 0$ ;  $x = 0$ ), или  $\bar{O}$  ( $y = 3$ ;  $x = 0$ ).

Строим вспомогательную систему координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ , в которой строим параболу по формуле (4):  $\bar{y} = -0,5\bar{x}^2$ .

Рассмотрим еще один частный случай.

Пусть требуется построить график функции:  $y = x^2 - 5x + 6,25$  (рис. 50).

Преобразуем уравнение  $y = (x - 2,5)^2$ . (I)

Введем новые переменные:  $x - 2,5 = \bar{x}$ ;  $y = \bar{y}$ . (II)

Тогда уравнение (II) переписывается так:  $y = \bar{x}^2$ . (IV)

Построение графика функции (I) осуществляем следующим образом: сначала строим основную систему координат  $XOY$ ; затем находим по (IV) координаты точки  $\bar{O}$ :

$$\begin{cases} x - 2,5 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \text{ или } \bar{O}(x = 2,5; y = 0).$$

В системе  $XOY$  строим график функции  $\bar{y} = \bar{x}^2$ . (IV).

Изложенный способ построения графика имеет следующие преимущества перед традиционным:

а) При пользовании этим способом отпадает необходимость пользоваться сравнением табличных значений двух функций, т. е. нестрогим и потому малоубедительным индуктивным приемом; для этого способа характерна доказательность рассуждений: достаточно научиться строить график функций, заданных стандартным (каноническим) уравнением, чтобы затем уметь строить смещенные графики функций, данных общим уравнением.

б) Описанный способ обладает общностью: однажды рассмотренный, он по аналогии переносится на случай построения графиков любых других элементарных функций, данных в общем виде.



в) Пусть квадратный трехчлен записан в форме  $y = 2(x - 3)^2 - 4$ . Если строить график этой функции общепринятым сейчас способом, то мы должны в соответствии с числом  $-4$  перенести график  $y = 2x^2$  (по оси координат) вверх на четыре единицы, а затем в соответствии с числом  $+3$  перенести график еще раз влево на три единицы.

Таким образом, со знаком «плюс» ассоциируются два направления: вверх и влево; второй перенос вступает в психологическом плане в противоречие с обычными представлениями: ведь левее расположено направление влево не связывается со знаком «плюс». Из-за этого противоречия ученикам трудно бывает запомнить правила переноса графика, и зачастую ошибки при построении графиков допускаются именно поэтому даже учениками старших классов.

В предлагаемой методике построения графиков этот недочет преодолен: положение начала вспомогательной системы координат определяется посредством решения уравнений, в которых правые части приравнены нулю, т. е. единым приемом. После этого проявляются единообразные ассоциации: со знаком «+» связан перенос осей координат вправо и вверх, со знаком «—» связан перенос их влево и вниз<sup>1</sup>.

г) Аналитическая сторона предлагаемого способа сводится к замене переменных. Замена переменных является одним из важнейших математических методов. Он известен ученикам уже из курса алгебры VII класса (таким приемом решаются некоторые системы уравнений). С заменой переменных связано геометрическое преобразование — параллельный перенос осей координат, — которое широко используется в геометрии.

д) В рассматриваемом способе построения графика используется перенос осей координат — прямых линий, что осуществляется гораздо проще, чем перенос кривых (т. е. самих графиков) при традиционном способе построения.

е) Построение смещенных парабол при существующем способе связано с серьезными практическими трудностями: например, невозможно при этом пользоваться осью симметрии графика и поэтому нахождение двух симметричных опорных точек требует раздельного вычисления координат этих точек; при пользовании вспомогательной системой координат используется симметрия графика, и поэтому вычислительная работа сводится к минимуму; при этом удается также широко пользоваться шаблонами.

ж) При существующем индуктивном методе обучения построению графика тратится много времени на подготовительные этапы (частные случаи); на построение графика общего вида остается мало времени.

<sup>1</sup> Даже известные ученые пишут об удивительной живучести подобных ошибок у изучающих высшую математику (акад. Я. Б. Зельдович [10, стр. 29]).



В частности, этим, видимо, и объясняется то, почему в современных учебниках и методических пособиях ограничиваются графическим решением систем уравнений, соответствующих только простейшим положениям кривых относительно осей координат.

При пользовании методом переноса осей координат удастся решать графически более сложные упражнения, так как основной материал удастся пройти за меньшее время.

## 11. ПРОПЕДЕВТИКА ПРИЕМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

В связи со сказанным выше в плане пропедевтики метода переноса осей полезно решать две взаимно обратные задачи.

1. **Прямая задача.** Дана система координат  $XOY$ . Построить вспомогательную систему координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ , зная координаты точки  $\bar{O} \left( x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{4} \right)$  (стр. 225, рис. 48).

**Решение.** Переносим ось ординат  $OY$  влево на  $\frac{1}{2}$  единицы, а ось абсцисс  $OX$  вверх на  $\frac{5}{4}$  единицы.

Перенесенные оси в новом положении образуют систему координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ .

При решении таких задач вместо обычного оборота речи *восставим перпендикуляры* или *проведем прямую, параллельную такой-то оси*, и т. п. следует намеренно пользоваться оборотом: *переносим ось абсцисс (ординат) на столько-то единиц*.

Решая такие задачи, учащиеся замечают, что знаки координат точки  $\bar{O}$ , начала вспомогательной системы координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ , совпадают с направлениями переноса осей основной системы координат  $XOY$ : минус  $\rightarrow$  вниз, влево; плюс  $\rightarrow$  вверх, вправо.

2. **Обратная задача.** Дана вспомогательная система координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ . Координаты точки  $\bar{O}$  в основной системе координат  $XOY$  должны быть следующие:  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{5}{4}$ .

Построить основную систему координат  $XOY$  согласно этому условию.

**Решение.** Точка  $\bar{O}$  находится на расстоянии  $\frac{1}{2}$  единицы левее оси ординат  $OY$  ( $x = -\frac{1}{2}$ ); значит, и наоборот: ось ординат  $OY$  находится правее точки  $\bar{O}$  на расстоянии  $\frac{1}{2}$  единицы.

Поэтому перенесем ось  $\bar{O}\bar{Y}$  вправо на  $\frac{1}{2}$  единицы.

Точка  $\bar{O}$  находится на расстоянии в  $\frac{5}{4}$  единицы выше оси абсцисс  $OX$ ; следовательно, ось абсцисс  $OX$  находится ниже точки  $\bar{O}$



на расстоянии  $\frac{5}{4}$  единицы. Поэтому перенесем ось  $OX$  вниз на  $\frac{5}{4}$  единицы.

Перенесенные оси в новом положении образуют основную систему координат  $XOY$ .

(Ученики замечают, что при решении обратной задачи знаки координат точки  $\bar{O}$  противоположны направлениям переноса осей.)

## 12. ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ИЗУЧЕНИИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В существующей практике обучения неравенства второй степени в средней школе изучают значительно позже уравнений второй степени.

Однако уравнения и неравенства второй степени возможно и целесообразно рассматривать одновременно на основе графика квадратного трехчлена. Здесь дидактически выгодно решать совместно два неравенства второй степени ( $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$ ) и соответствующее им квадратное уравнение ( $ax^2 + bx + c = 0$ ), которые в совокупности характеризуют квадратичную функцию  $y = ax^2 + bx + c$ .

Отметим также следующее обстоятельство: решение неравенства второй степени на основе графических представлений является более общим методом, чем аналитическое решение его на основе сведения к системе линейных неравенств.

Пусть, например, требуется решить неравенство  $3x^2 + 3x + 2 > 0$ . Попробуем разложить левую часть на множители.

Разложить левую часть на множители невозможно, так как дискриминант уравнения  $3x^2 + 3x + 2 = 0$  отрицателен; значит, решить это неравенство посредством системы линейных уравнений невозможно (см. рисунок 48 на стр. 225).

Решение можно выполнить следующим рассуждением: дискриминант отрицателен  $\rightarrow$  нет (действительных) корней  $\rightarrow$  парабола не пересекает оси  $X$ -в, в квадратном трехчлене  $y = 3x^2 + 3x + 2$  первый коэффициент положителен  $\rightarrow$  ветвь параболы направлена вверх; если парабола не пересекает оси  $x$  и ветвь ее неограниченно уходит вверх,  $\rightarrow$  то значения квадратного трехчлена всюду положительны (т. е. вершина параболы будет выше оси абсцисс).

Итак, решением неравенств  $3x^2 + 3x + 2 > 0$  является любое действительное число ( $-\infty < x < \infty$ ).

Целесообразно сразу обратить внимание на то, что соответствующее уравнение  $3x^2 + 3x + 2 = 0$  и противоположное неравенство  $3x^2 + 3x + 2 < 0$  не имеют решений, ибо все точки числовой оси выражают решения первого неравенства.

Решим еще одно неравенство:



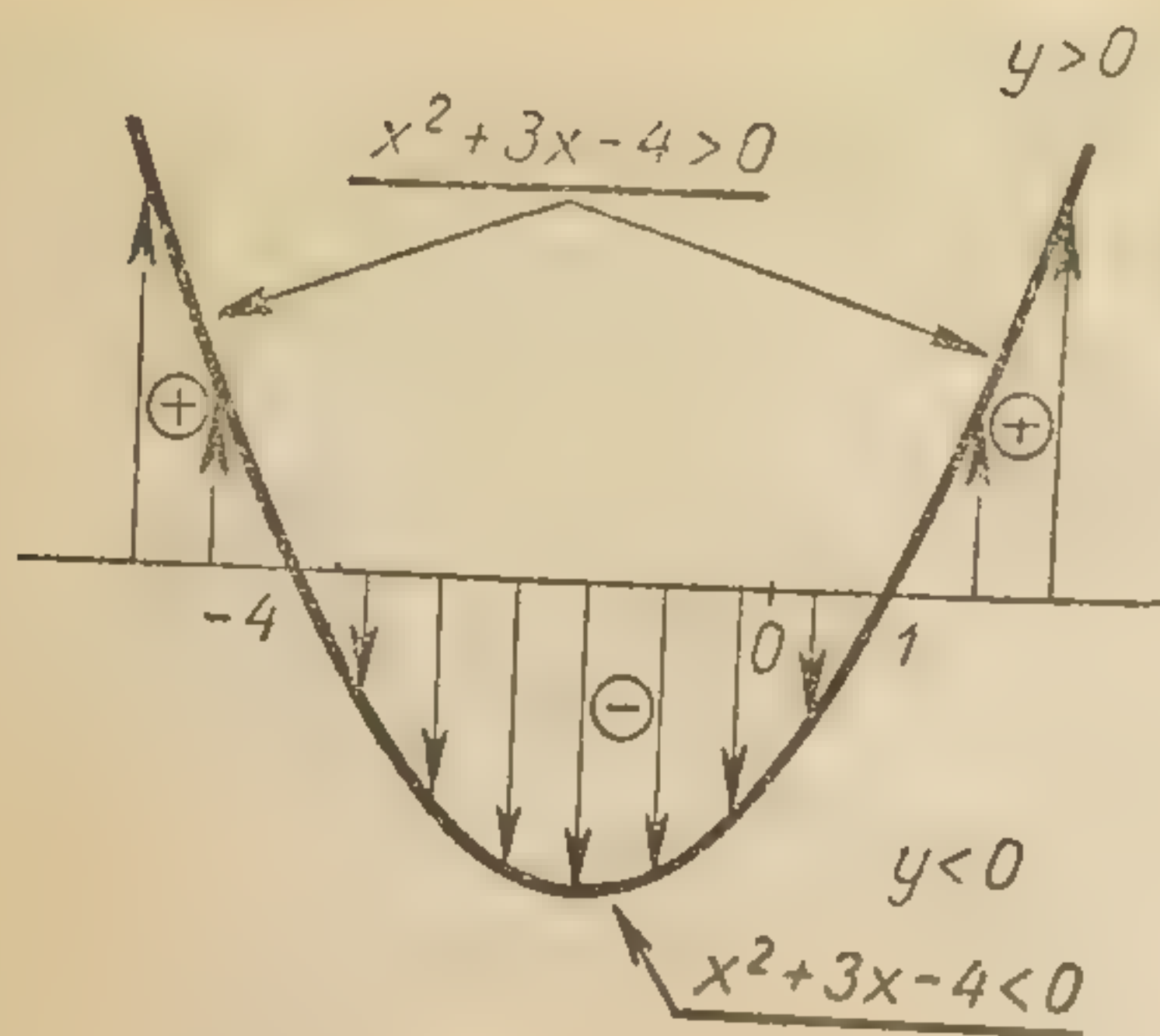


Рис. 51

$$-x^2 - 3x + 4 < 0. \quad (1)$$

Заменяем его равносильным неравенством; умножим обе части неравенства на  $(-1)$ :

$$x^2 + 3x - 4 > 0.$$

Составим соответствующий квадратный трехчлен:

$$y = x^2 + 3x - 4.$$

$a > 0$ ; значит, ветвь параболы направлена вверх.

Решаем соответствующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 4 &= 0; \\ x &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}; \\ x_1 &= 1; \quad x_2 = -4. \end{aligned}$$

Строим схематически параболу, проходящую через эти две точки с ветвью, направленной вверх; со временем ученики привыкают довольно легко представлять в воображении соответствующую кривую (рис. 51).

Итак, имеем:

$$1) \quad -x^2 - 3x + 4 < 0 \text{ при } -\infty < x < -4 \text{ и } +1 < x < +\infty.$$

2) После решения этого неравенства, как следствие, автоматически получаем решение противоположного неравенства:  $-x^2 - 3x + 4 > 0$ ; решением его будут оставшиеся промежутки числовой оси:  $-4 < x < +1$ .

3) В точках, в которых график пересекает ось абсцисс, значение функции равно нулю; иначе говоря, тот же график «решает» геометрически уравнение  $-x^2 - 3x + 4 = 0$ .

Корни:  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = +1$ .

Ответ удобно записать совместно:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 4 \geq 0 &\longrightarrow \left. \begin{array}{l} x < -4 \\ x > 1 \end{array} \right\} \\ &\longleftarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = +1 \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} x > -4 \\ x < 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$



Схематическое построение кривой, проходящей через две точки  $x_1$  и  $x_2$  (координаты которых вычислены), заменяет достаточно длинные преобразования, которые приходится выполнять при аналитическом решении квадратного неравенства через систему линейных неравенств:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 4 &< 0; \\ x^2 + 3x - 4 &> 0; \\ (x + 4)(x - 1) &> 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x + 4 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} & \begin{cases} x > -4, \\ x < 1; \end{cases} & -4 < x < 1; \\ \text{б) } \begin{cases} x + 4 < 0, \\ x - 1 < 0; \end{cases} & \begin{cases} x < -4, \\ x > 1 \end{cases} & \text{(противоречивая система).} \end{aligned}$$

К тому же в школьных задачниках, где квадратные неравенства предлагаются независимо от квадратных уравнений, нередко вообще не предлагают неравенства с отрицательным дискриминантом, коль скоро их нельзя свести к системе линейных неравенств.

Итак, на основе знаний о квадратном трехчлене и квадратном уравнении можно решить любое неравенство второй степени, не обращаясь к системе линейных неравенств.

Это позволяет объединить изучение неравенства второй степени и изучение квадратного трехчлена в одной теме, что с психологической точки зрения не только целесообразно, но и необходимо, так как при этом достигается завершенность цикла системы упражнений и целостность восприятия и в итоге — изучение материала за оптимальное время.

Рассмотрим вопрос о графическом решении квадратного неравенства. Пусть требуется решить графически следующее упражнение:

$$x^2 - x - 6 \geq 0.$$

**Решение (1-й способ).**

Строим график функции  $y = x^2 - x - 6$ .

Определяем далее корни уравнения по графику:  $x_1 = +3$ ;

$$x_2 = -2.$$

Определяем решения неравенства по графику (рис. 52):

$$y = x^2 - x - 6 > 0 \text{ при } x_1 > +3; x_2 < -2.$$

$$y = x^2 - x - 6 < 0 \text{ на оставшемся интервале числовой оси,}$$

а именно на промежутке  $-2 < x < +3$ .

**Решение (2-й способ).**

$$\text{Вместо совокупности неравенств и уравнения } x^2 - x - 6 \geq 0$$

можно решить графически следующее задание:

$$x^2 \geq x + 6,$$



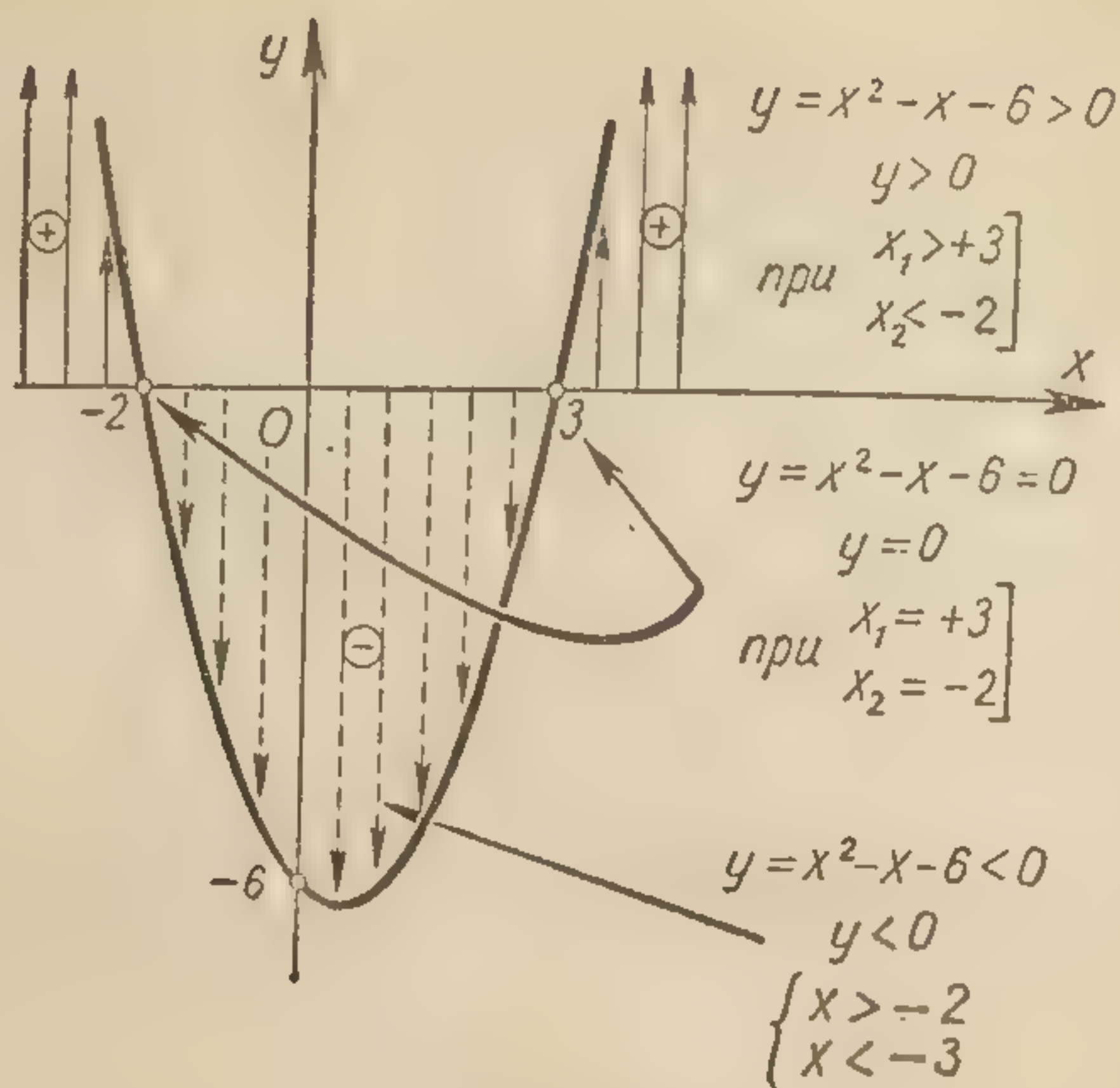


Рис. 52

тогда графическое решение сводится к выяснению взаимного расположения частей кривой и прямой (рис. 53).

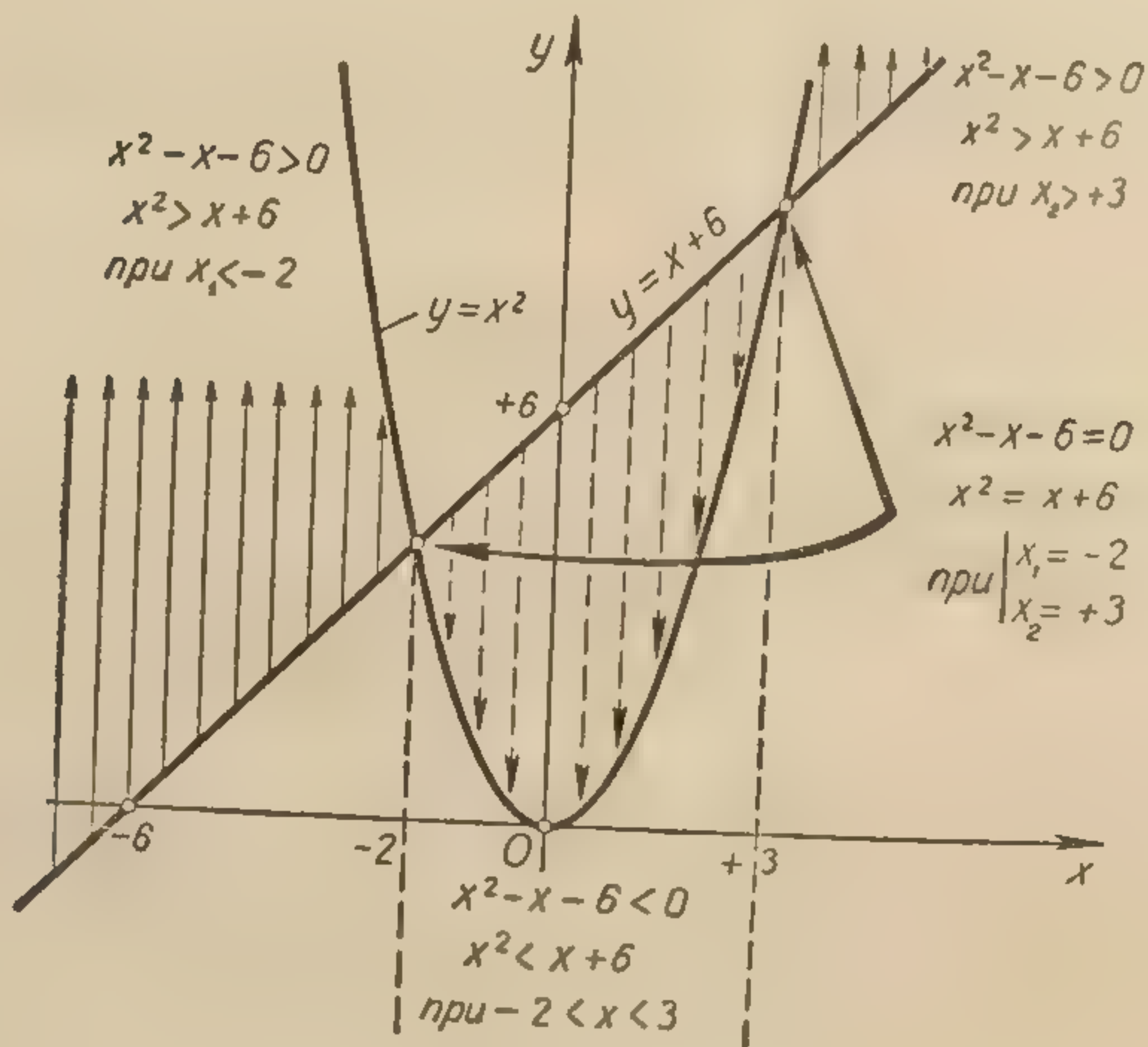


Рис. 53



При этом рассуждаем так: если парабола располагается  $\frac{\text{выше}}{\text{ниже}}$  прямой линии, то  $x^2 \geq x + 6$ .

Если парабола пересекается с прямой линией, то абсциссы точек пересечения суть корни уравнения.

Остается лишь добавить, что неравенства вида

$$\frac{x+a}{x+b} > 0; \quad \frac{x+b}{x+a} > 0; \quad (x+b)(x+a) > 0 \text{ являются}$$

равносильными неравенствами, имеющими одну и ту же область решений.

Чтобы это показать, достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на знаменатель, например:

$$\frac{x+a}{x+b} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+a)(x+b)}{(x+b)^2} > 0 \Leftrightarrow (x+a)(x+b) > 0.$$

Знаменатель во второй записи можно опустить, как положительное число ( $x \neq b$ ).

### 13. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Овладение алгоритмом построения графика квадратного трехчлена методом переноса осей координат облегчает исследование квадратного трехчлена.

Так, например, определение координат точки  $\bar{O}$  (начала вспомогательной системы  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ ) относительно основной системы координат  $XOY$  означает в то же самое время и нахождение экстремума функции (наибольшего или наименьшего ее значения).

Вначале исследование трехчлена проводится по построенному графику в целях закрепления решения задачи на построение графиков.

Впоследствии, конечно, решаются задачи на исследование квадратного трехчлена и без точного построения самого графика.

Учащиеся должны помнить следующее двучленное суждение: если в квадратном трехчлене  $y = ax^2 + bx + c$  коэффициент при первом члене  $\frac{\text{положителен}}{\text{отрицателен}}$ , то ветвь параболы направлена  $\frac{\text{вверх}}{\text{вниз}}$

и соответственно функция имеет  $\frac{\text{минимум}}{\text{максимум}}$ .

Иначе говоря, при  $a > 0$  существует наименьшее значение функции ( $y_{\min}$ ); при  $a < 0$  существует наибольшее значение функции ( $y_{\max}$ ).

Пусть дана функция  $y = 3x^2 + 3x + 2$ .

Так как  $a = 3 > 0$ , то существует  $y_{\min}$ .

Дальше трехчлен преобразуем как обычно:



$$\bar{y} = 3\bar{x}^2;$$

$$y - y_0 = 3 \cdot (x - x_0)^2;$$

$$y = 3x^2 - 6x_0x + 3x_0^2 + y_0;$$

$$y = 3x^2 + 3x + 2;$$

$$-6x_0 = 3; \quad x_0 = -\frac{1}{2};$$

$$3x_0^2 + y_0 = 2; \quad \frac{3}{4} + y_0 = 2; \quad y_0 = \frac{5}{4};$$

$$y - \frac{5}{4} = 3 \left( x + \frac{1}{2} \right)^2;$$

$$\bar{O} \begin{cases} \bar{x} = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \bar{O} \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Итак, при  $x = -\frac{1}{2}$  существует  $y_{\min} = \frac{5}{4}$ .

При исследовании квадратного трехчлена по его графику удобно воспользоваться сравнением положений графика во вспомогательной системе координат  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  и в основной системе  $XOY$ .

Результаты сравнения удобно фиксировать параллельно (рис. 48, стр. 225).

$$y = 3x^2 + 3x + 2;$$

$$\bar{y} = 3 \cdot (\bar{x})^2.$$

Уравнение	Система координат	
	Вспомогательная $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$	Основная $XOY$
Уравнение	$\bar{y} = 3\bar{x}^2$	$y - \frac{5}{4} = 3 \left( x + \frac{1}{2} \right)^2$
Функция монотонно убывает при	$\bar{x} < 0$	$x + \frac{1}{2} < 0; x < -\frac{1}{2}$
Функция монотонно возрастает при	$0 < \bar{x}$	$x + \frac{1}{2} > 0; x > -\frac{1}{2}$
Функция достигает минимума в точке с координатами (вершина параболы)	$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \end{cases}$	$x + \frac{1}{2} = 0; x = -\frac{1}{2}$ $y - \frac{5}{4} = 0; y = \frac{5}{4}$
Функция	Не имеет максимума	Не имеет максимума
Функция не ограничена	Сверху	Сверху
Функция ограничена снизу	$\bar{y} > 0$	$y > \frac{5}{4}$



Уравнение	Система координат	
	Вспомогательная $\bar{x}\bar{y}$	Основная $xoy$
График функции симметричен относительно	Прямой $x = 0$ ; (оси ординат $\bar{O}\bar{y}$ )	Прямой $x = -\frac{1}{2}$
Функция	Четная $3\bar{x}^2 = 3(-x)^2$	Ни четная, ни нечетная
Значение функции стремится к $\infty$	$\bar{y} \rightarrow \infty$ при $\bar{x} \rightarrow \infty$ при $\bar{x} \rightarrow -\infty$	$y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow -\infty$
Значение функции стремится к 0	$\bar{y} \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$	$y \rightarrow \frac{5}{4}$ при $x \rightarrow -\frac{1}{2}$
Область определения функции	$\bar{x}$ — любое действительное число ( $-\infty; \infty$ )	$x$ — любое действительное число ( $-\infty; \infty$ )
Область значений функции	$\bar{y} > 0$	$y > \frac{5}{4}$
Функция	Непериодическая	Непериодическая
Нули квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ (корни квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ )	Отсутствуют	Отсутствуют

Изложенный выше метод построения графика функции переносом осей координат и их исследования применим при изучении и других элементарных функций, данных в общем виде.

Это имеет причиной то, что перекодировка суждений от одной системы координат к другой значительно облегчает характеристику особенностей функции.

Рассмотрим несколько примеров.

Показательная функция.

$$\begin{aligned}
 y &= 8 \cdot 2^x + 5; \\
 y &= 2^3 \cdot 2^x + 5; \\
 y - 5 &= 2^{x+3}; \\
 x - 3 &= \bar{x}; \\
 y - 5 &= \bar{y}; \\
 \bar{y} &= 2^{\bar{x}}; \\
 \bar{O} &(-3; 5).
 \end{aligned}$$

Логарифмическая функция.

$$\begin{aligned}
 y &= \log_2 (x - 3) + 5; \\
 y - 5 &= \log_2 (x - 3); \\
 x - 3 &= \bar{x}; \\
 y - 5 &= \bar{y}; \\
 \bar{y} &= \log_2 \bar{x}; \\
 \bar{O} &(3; 5).
 \end{aligned}$$



Дробно-линейная функция (график — смещенная гипербола).  $y = \frac{5x-11}{x-3}$ .

Или:  $yx - 3y - 5x + 11 = 0$ .

Уравнение смещенной гиперболы содержит произведение переменных ( $xy$ ) и не содержит квадратов переменных ( $x^2, y^2$ ).

Применим метод неопределенных коэффициентов.

Пусть во вспомогательной системе координат ее уравнение имеет вид:

$$\bar{y} = \frac{k}{\bar{x}} \text{ или}$$

$$\bar{y} \cdot \bar{x} = k.$$

$$\bar{x} = x - x_0;$$

$$\bar{y} = y - y_0;$$

$$\bar{O}(x_0; y_0).$$

Далее имеем:

$$(x - x_0)(y - y_0) = k;$$

$$xy - x_0 y_0 x + x_0 y_0 y - k = 0;$$

$$xy - 3y - 5x + 11 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых неизвестных, имеем:  $-x_0 = -3$ ;  $x_0 = 3$ ;  $-y_0 = -5$ ;  $y_0 = 5$ ;  $x_0 y_0 - k = 11$ ;  $3 \cdot 5 - k = 11$ ;  $k = 4$ .

Итак уравнение гиперболы таково:

$$\bar{y} = \frac{4}{\bar{x}}.$$

Или:

$$y - 5 = \frac{4}{x - 3}; \bar{O}(3; 5).$$

Построение графика показано на рис. 54.

Смещенная окружность.

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0.$$

Уравнение смещенной окружности содержит сумму квадратов переменных ( $x^2 + y^2$ ) и не содержит произведения переменных ( $xy$ ).

Применим метод неопределенных коэффициентов.

Пусть во вспомогательной системе координат ее уравнение имеет вид:

$$\bar{y}^2 + \bar{x}^2 = r^2, \text{ где}$$

$r$  — радиус окружности.

$$\bar{x} = x - x_0;$$

$$\bar{y} = y - y_0; \bar{O}(x_0; y_0).$$

Далее имеем:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2;$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых неизвестных, имеем:

$$-2x_0 = 6; x_0 = -3;$$

$$-2y_0 = -4; y_0 = 2;$$

$$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 4;$$

$$9 + 4 - r^2 = 4;$$

$$r^2 = 9; r = 3.$$

Итак, уравнение окружности таково:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 3^2.$$

Или:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2;$$

$$\bar{O}(-3; 2).$$

Построение графика показано на рис. 55.



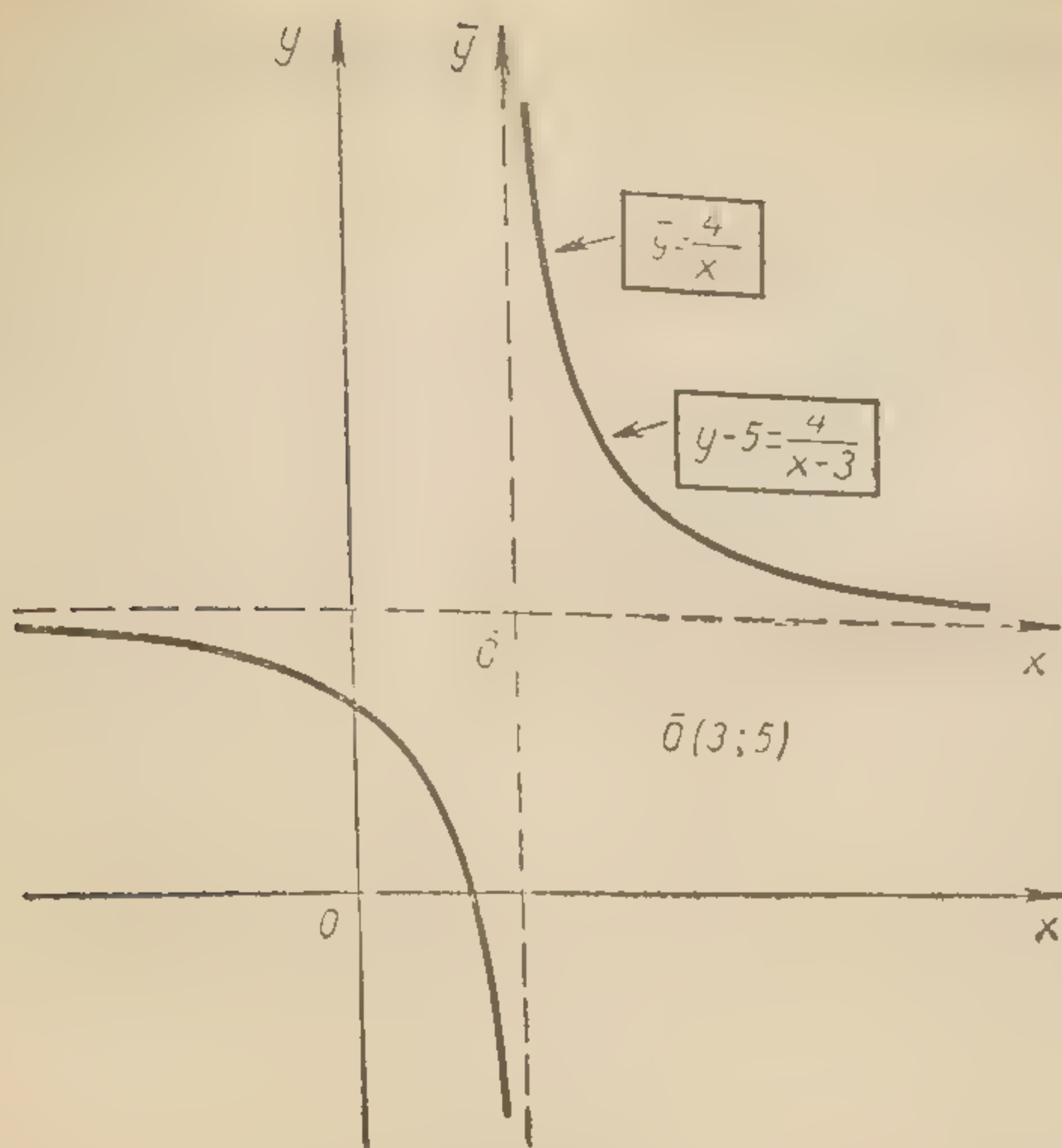


Рис. 54

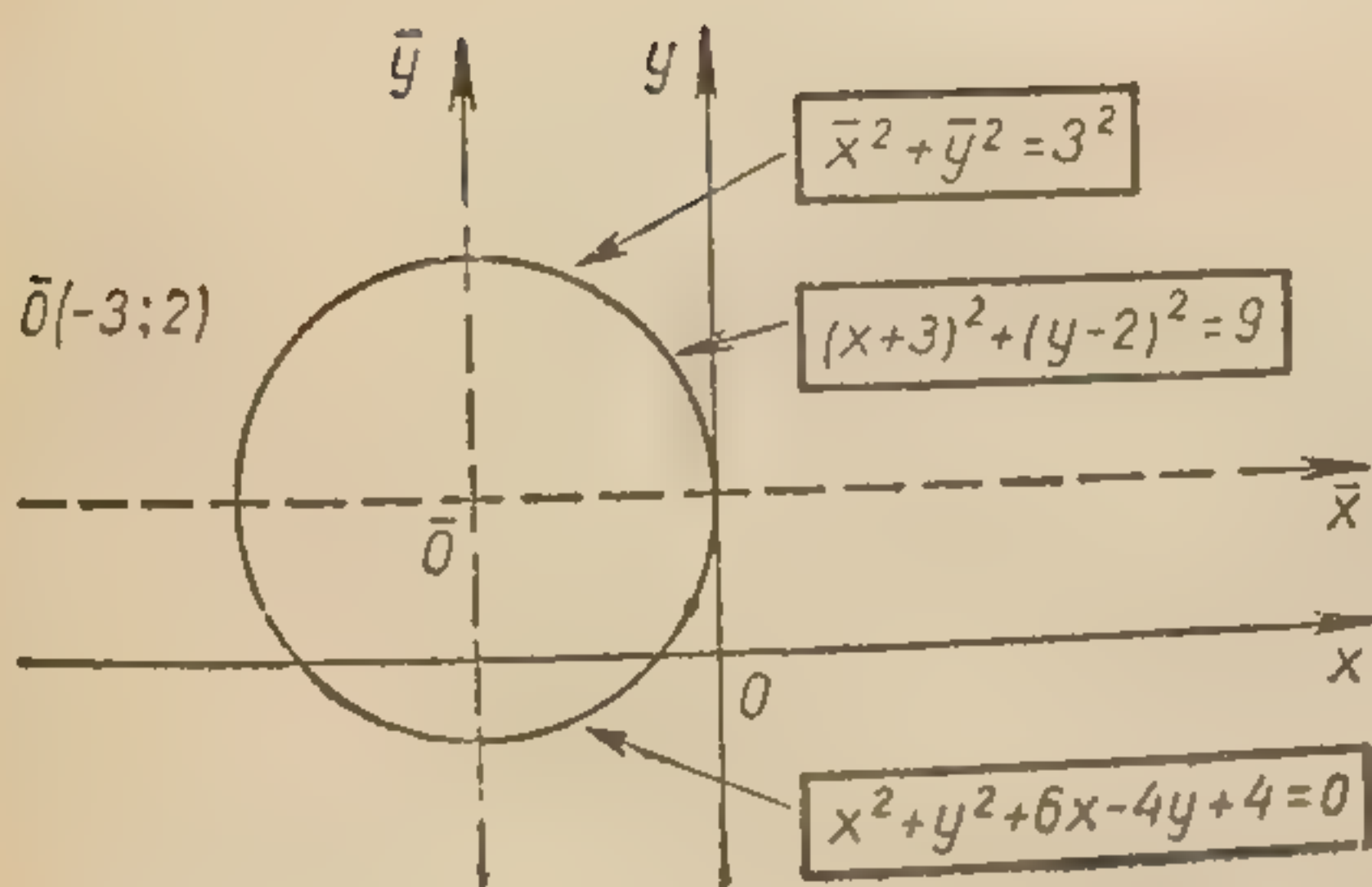


Рис. 55

Смещенная кубическая парабола.  
Пусть требуется построить график функции  
 $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$ .

Правую часть представим так:

$$y = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 3;$$

$$y = (x - 2)^3 - 3.$$

Или:  $y + 3 = (x - 2)^3$ ;

$$\bar{y} = y + 3; \quad O(\bar{x} = 0; \bar{y} = 0).$$

$$\bar{x} = x - 2;$$



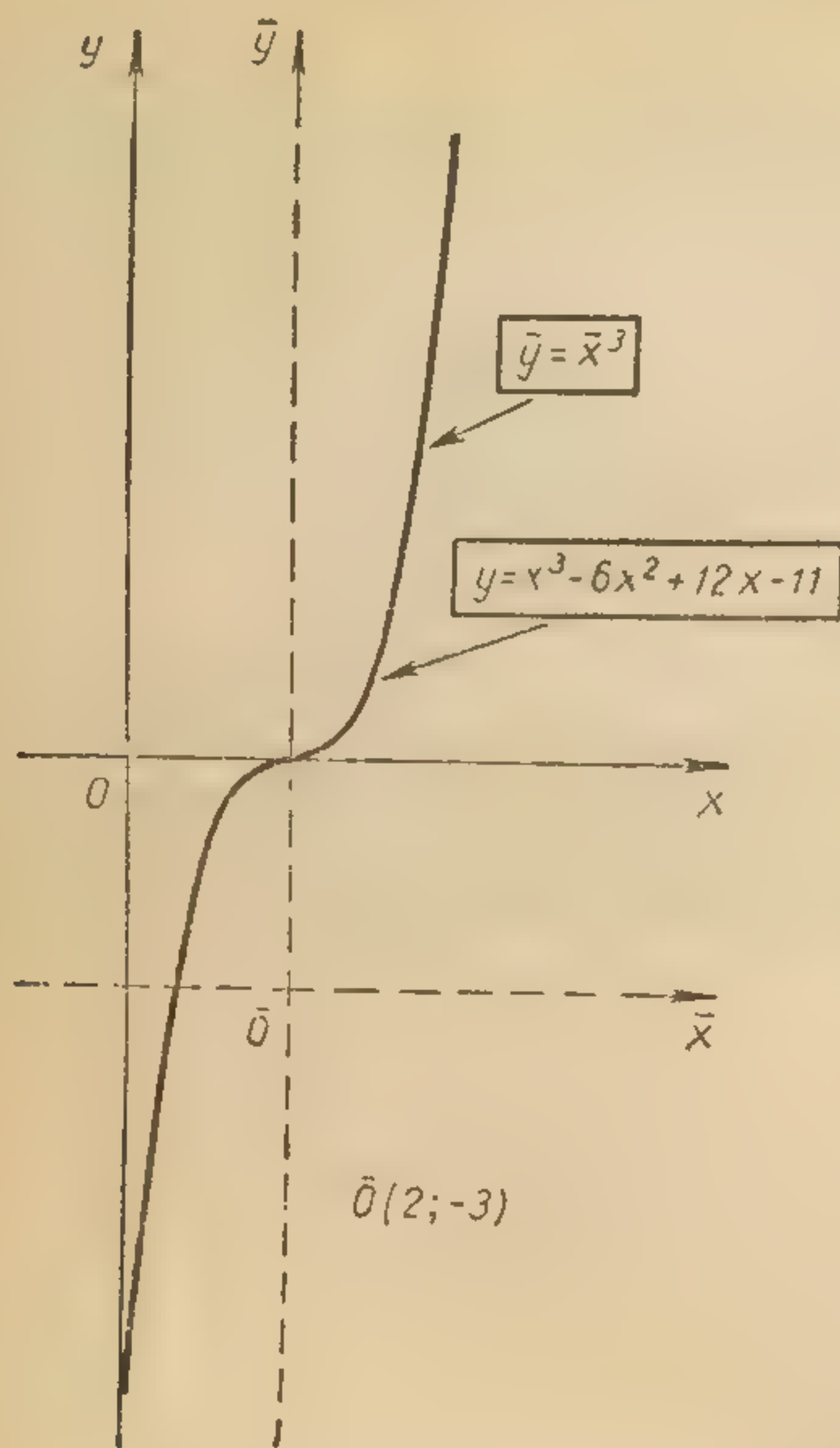


Рис. 56

Итак,  $\bar{y} = \bar{x}^3$ , или  $\bar{O}(2; -3)$ .  
Построение графика показано на рис. 56.

#### 14. О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ И ИХ ГРАФИКОВ

При выполнении графических упражнений полезно ознакомить учащихся с отражением графика относительно осей координат, т. е. с построением графика, симметричного данному относительно оси, и соответствующим аналитическим преобразованием функции.

##### 1. Отражение от оси ординат.

Пусть дана функция  $y = f(x)$ . (I)

Если каждой точке  $A$  с координатами  $(a; b)$  функции (I) соответствует точка  $A_1$  с координатами  $(-a, b)$  функции (II), то вторая функция (II), то вторая функция

будет выражаться уравнением  $y = f(-x)$  (II). Графики функций (I) и (II) будут симметричны относительно оси ординат.

Пусть дан квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  (Ia).

Чтобы получить уравнение функции (IIa), график которой симметричен графику функции (Ia) относительно оси ординат, надо в выражении (Ia) всюду вместо  $x$  записать:  $(-x)$ ;  $y = a(-x)^2 + b(-x) + c$ , или  $y = ax^2 - bx + c$  (IIa).

На рис. 57 показано построение графика функции  $y = 2x^2 - 8x + 12$  и симметричного ему относительно оси  $OY$  графика функции  $y = 2x^2 + 8x + 12$  отражением первого графика от оси ординат.

Тем же приемом можно преобразовать любые иные функции.

Так, например, логарифмики  $y = \log_2 x$  и  $y = \log_2 (-x)$ , окружности  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$  и  $(-x)^2 + y^2 + 6(-x) - 4y + 4 = 0$  (или  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ ) симметричны также относительно оси ординат.

То же самое верно и относительно гипербол:



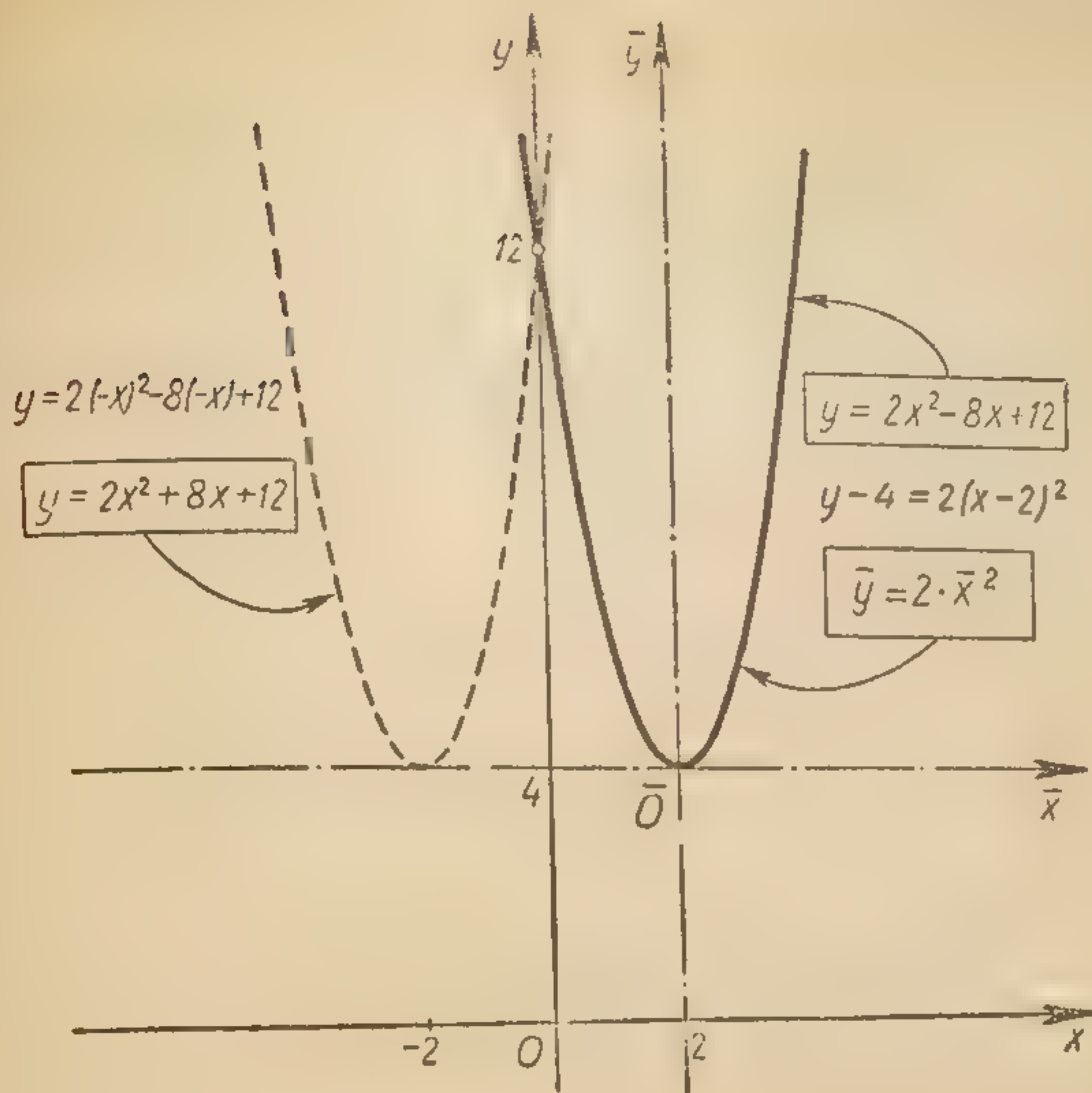


Рис. 57

$yx - 3y - 5x + 11 = 0$  и  $-yx - 3y + 5x + 11 = 0$ , кубических парабол:  $y = -x^3 - 6x^2 + 12x - 11$  и  $y = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 12(-x) - 11$  (или  $y = -x^3 - 6x^2 - 12x - 11$ ).

Если построен график функции  $y = f(x)$ , то график функции  $y = f(-x)$  можно получить, перегнув чертеж по оси  $OY$  и скопировав его с одной полуплоскости на другую.

Как видно из приведенных примеров, уравнение функции  $f(-x)$ , график которой симметричен относительно оси  $OY$ , можно получить, заменив в уравнении  $y = f(x)$  всюду  $x$  на  $(-x)$ .

## 2. Отражение от оси абсцисс.

Пусть дана функция  $y = \varphi(x)$ . (III)

Если каждой точке  $B$  с координатами  $(a; b)$  первой функции (III) соответствует точка  $B_1$  функции (IV) с координатами  $(a, -b)$ , то функция (IV) будет выражаться уравнением  $-y = \varphi(x)$ , или  $y = -\varphi(x)$ . (IV)

Графики функций (III) и (IV) будут симметричны относительно оси абсцисс. (IIIa)

Пусть дан квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$ . Пусть дан квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$ . Чтобы получить уравнение функции (IVa), график которой сим-



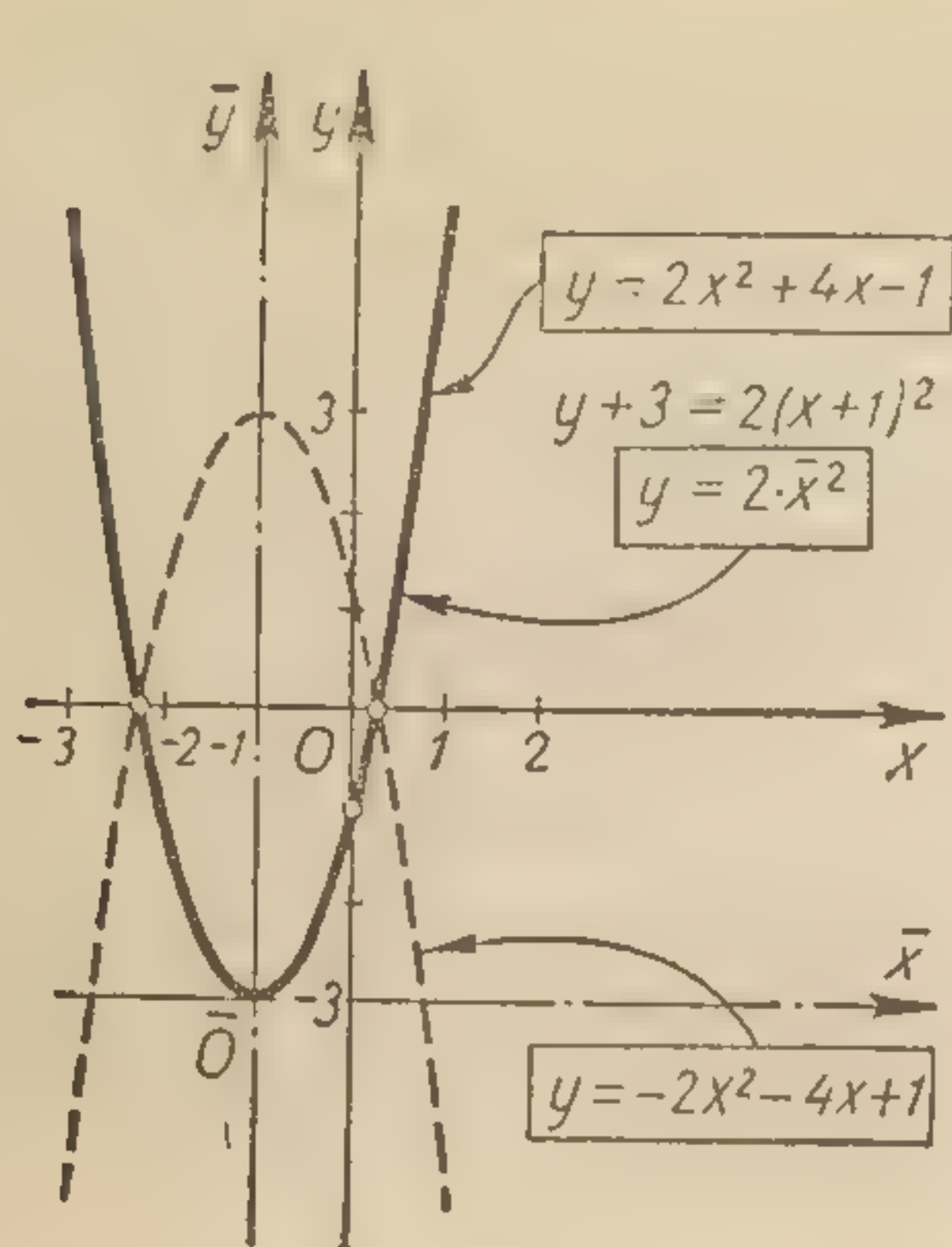


Рис. 58

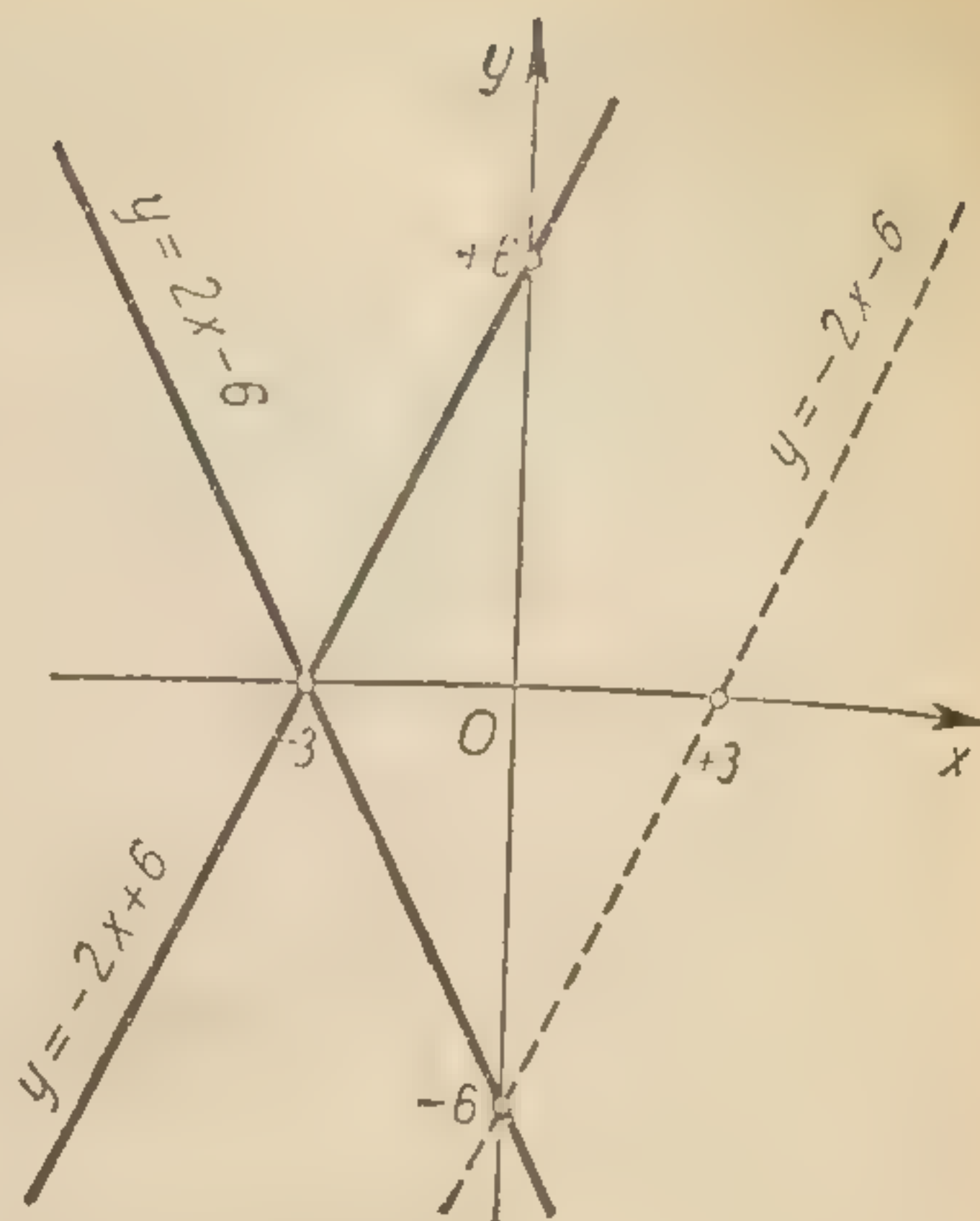


Рис. 59

метричен графику функции (IIIa) относительно оси абсцисс, надо в выражении (IIIa) число ( $y$ ) заменить числом ( $-y$ ):

$$-y = ax^2 + bx + c, \text{ или } y = -ax^2 - bx - c. \quad (\text{IVa})$$

На рис. 58 показано построение графика функции  $y = 2x^2 + 4x - 1$  и симметричного ему относительно оси  $OX$  графика функции  $y = -2x^2 - 4x + 1$ .

Такие же преобразования полезно выполнять и с линейной функцией: графики функций  $y = 2x - 6$  и  $y = -2x - 6$  будут симметричны относительно оси  $OY$ , а графики функций  $y = 2x - 6$  и  $y = -2x + 6$  будут симметричны относительно оси  $OX$  (рис. 59).

Отметим, что рассмотренные преобразования функций могут быть использованы при упражнениях и с другими функциями.

Укажем пары функций, графики которых симметричны относительно оси  $OX$ :

$$y = 2^x \text{ и } y = -2^x; y = \lg x \text{ и } y = -\lg x; y = \log_3 x \text{ и } y = -\log_3 x; \\ y = x^3 \text{ и } y = -x^3.$$

Симметричны относительно оси абсцисс гиперболы:

$$xy - 3y - 5x + 11 = 0 \text{ и } (-y)x - 3(-y) - 5x + 11 = 0 \\ (\text{или } -xy + 3y - 5x + 11 = 0), \text{ окружности: } x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 \text{ и } x^2 + (-y)^2 + 6x - 4(-y) + 4 = 0 \text{ (или } x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0).$$

Если построен график исходной функции  $y = f(x)$ , то для построения симметричного ему графика  $y = -f(x)$  достаточно перегнуть чертеж по оси абсцисс и скопировать линию с одной половины листа на другую.



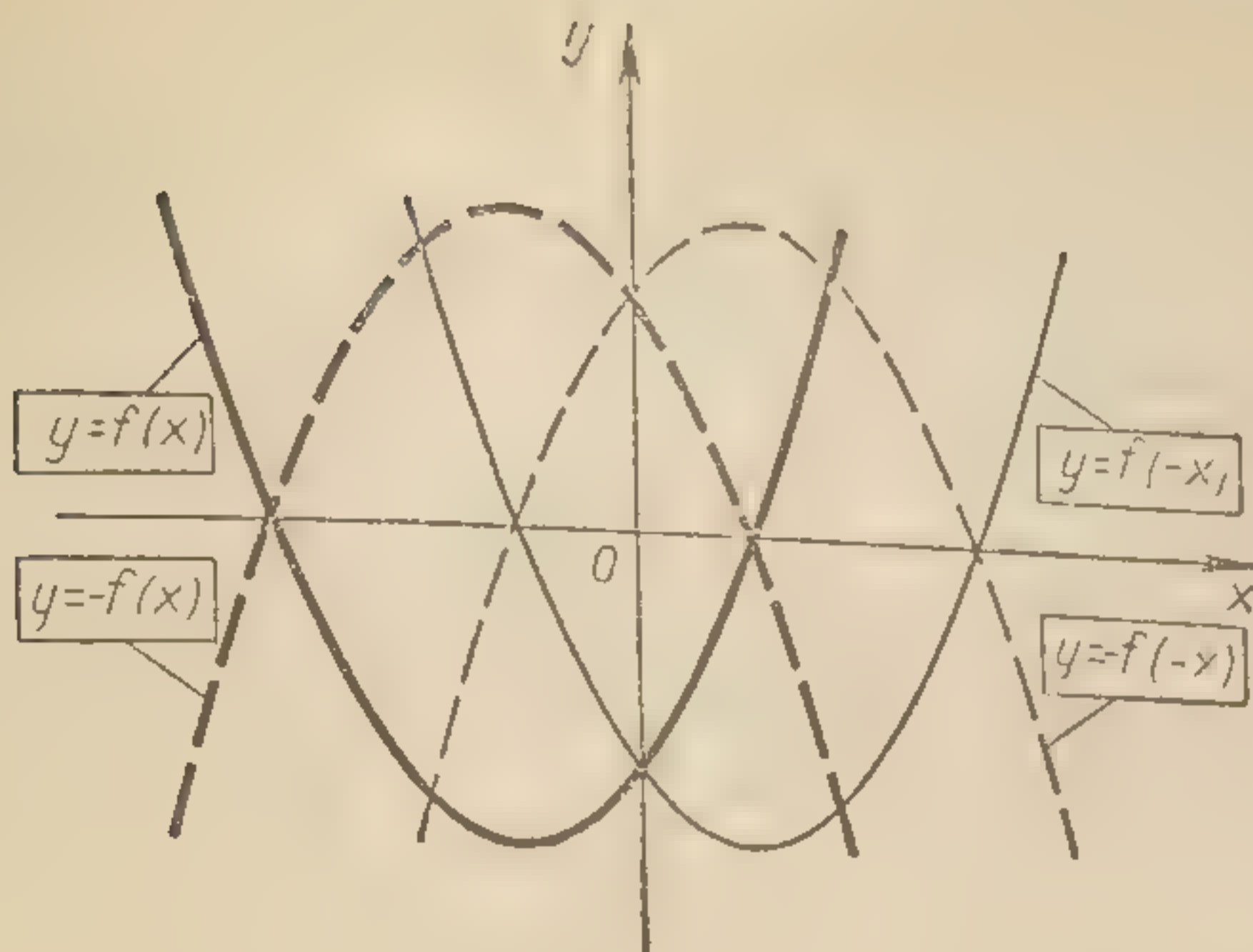


Рис. 60

Уравнение же второй функции получается подстановкой вместо  $(y)$  значения  $(-y)$  в уравнении исходной функции  $y = f(x)$ .

Суммируем сказанное выше о преобразованиях функции и его графика.

Пусть построен график функции  $y = f(x)$  (рис. 60).

Тогда между преобразованиями функции и их графиков существует следующая связь:

- |              |   |
|--------------|---|
| $y = f(x)$   | (I) — исходная функция;                                     |
| $y = -f(x)$  | (II) — отражение (I) от оси $OX$ .                          |
| $y = f(-x)$  | (III) — отражение (I) от оси $OY$ ;                         |
| $y = -f(-x)$ | (IV) — отражение (I) от начала координат<br>(от точки $O$ ) |
|              | или отражение (II) от оси $OY$ ,                            |
|              | или отражение (III) от оси $OX$ .                           |

## 15. О ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ «ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ»

Своевременное введение понятия «обратная функция» позволяет расширить комплекс упражнений новыми разновидностями их, что значительно содействует математическому развитию учащихся.

Вводим следующее определение:

Две функции называются взаимно обратными, если каждой точке  $A(a; b)$  графика первой функции соответствует точка  $A_1(b; a)$  графика второй функции.

Согласно введенному определению по данному уравнению прямой функции составляется уравнение обратной функции следующим образом:

1. Дана прямая функция  $y = f(x)$ . (I)
2. Производим замену ролями неизвестных и получаем выражение  $x = f(y)$ . (II)



Если исходить из того, что  $y$  является функцией, а  $x$  — аргументом, то выражение (II) представляет обратную функцию в неявной форме.

3. Решив уравнение (II) относительно  $y$  (при необходимости введя новый символ), мы получим уравнение, выражающее обратную функцию в явной форме:

$$y = \varphi(x).$$

Приведем примеры.

Прямая функция	Обратная функция в неявной форме	Обратная функция в явной форме
$y = ax + b$	$x = ay + b$	$y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
$y = x^3$	$x = y^3$	$y = \sqrt[3]{x}$ , или $y = x^{\frac{1}{3}}$
$y = a^x$	$x = a^y$	$y = \log_a x$
$y = \cos x$	$x = \cos y$	$y = \arccos x$ $y = \text{Arc} \cos x$ (многозначная)
$y = \frac{4}{x-3}$	$x = \frac{4}{y-3}$	$y = \frac{4}{x} + 3$
$y = -2x^2 + 4$	$x = 2y^2 + 4$	$y = \pm \sqrt{\frac{4-x}{2}}$ (двузначная)
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$	$y^2 + x^2 + 6y - 4x + 4 = 0$	

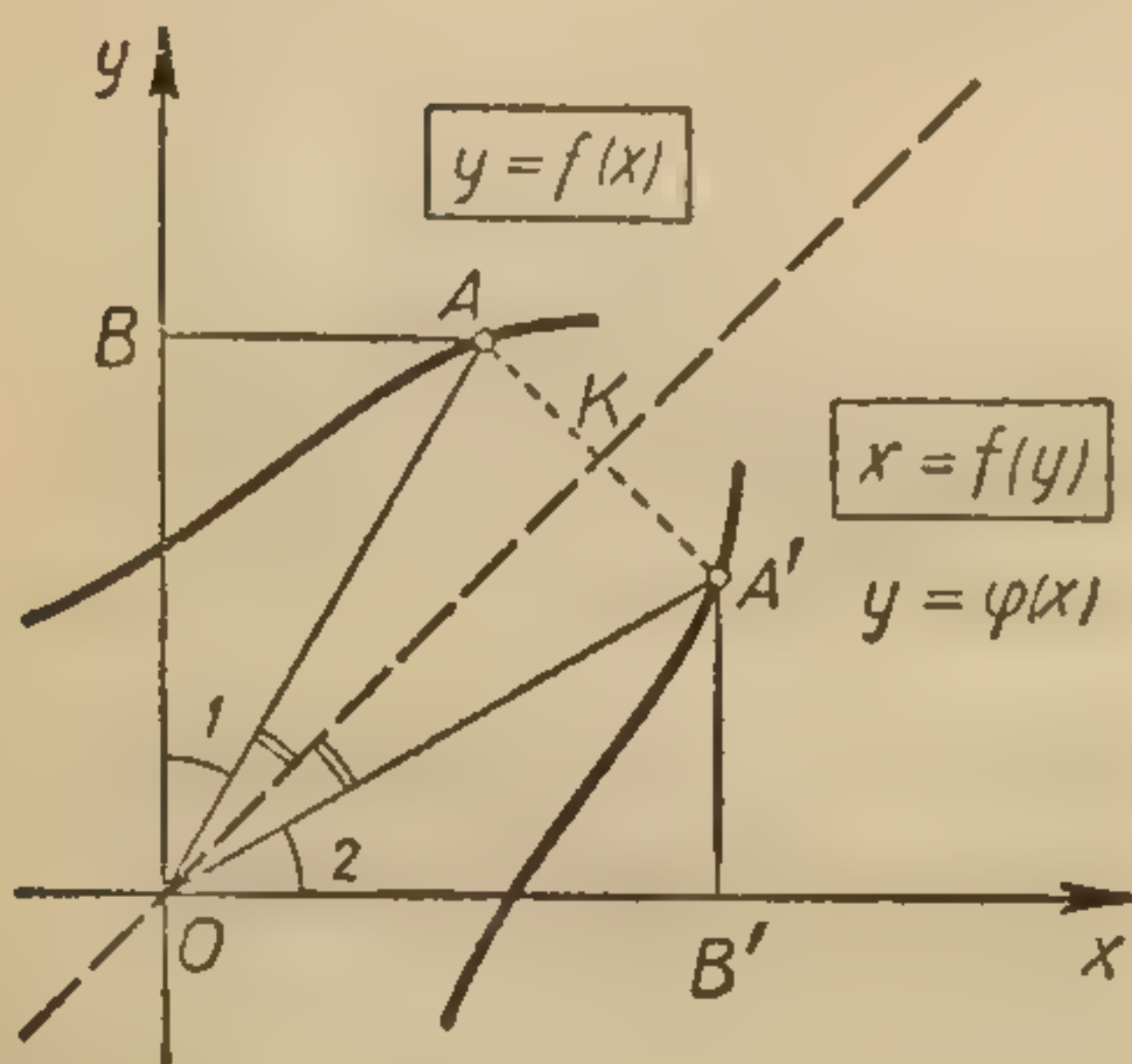


Рис. 61

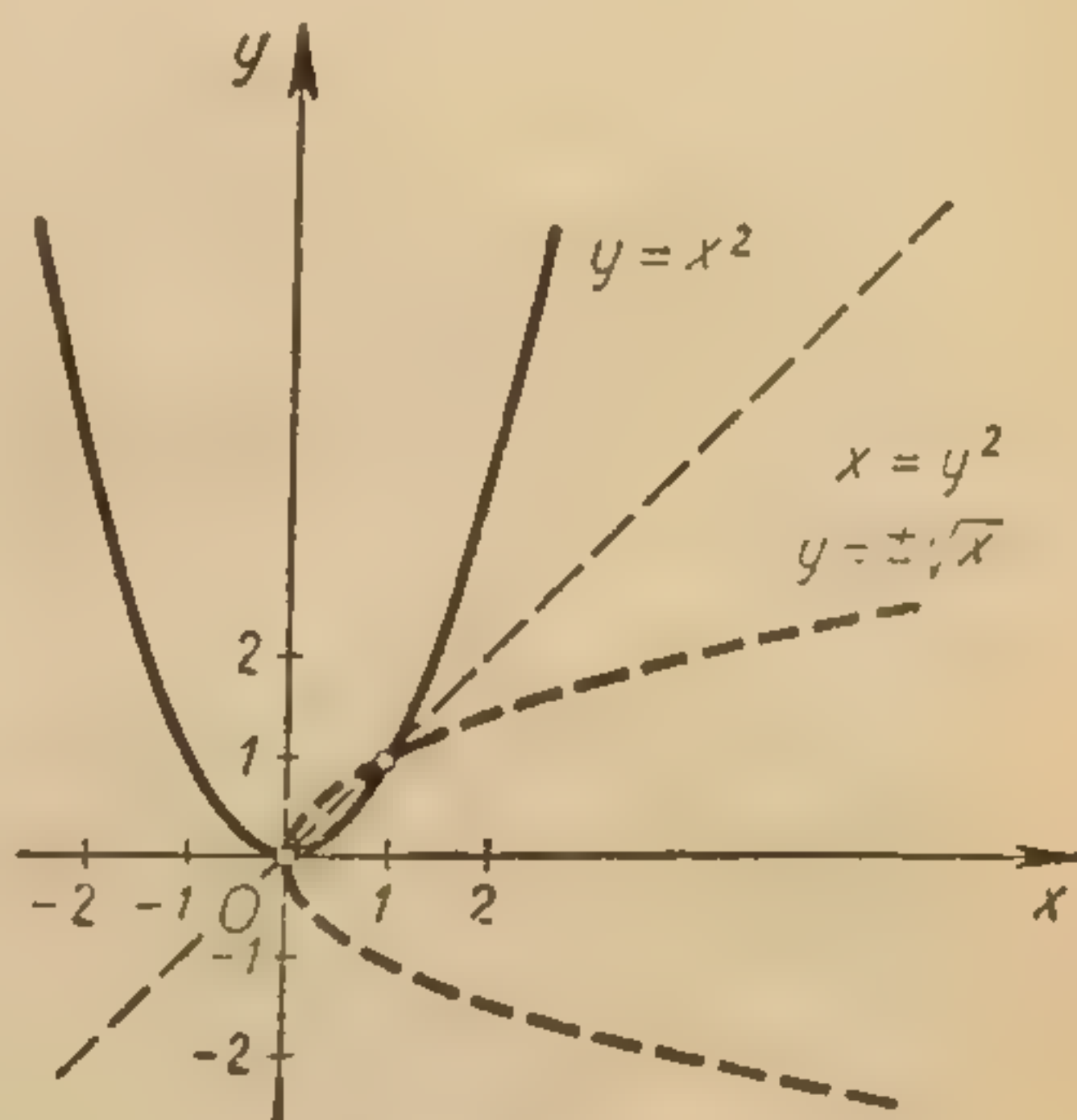


Рис. 62



Докажем основную теорему о свойстве взаимно обратных функций:

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 61).

### Доказательство

Согласно определению взаимно обратных функций для каждой точки  $A(a; b)$  первой функции существует точка  $A_1(b; a)$  второй функции.

Поэтому достаточно доказать, что каждая такая пара точек  $A$  и  $A'$  симметрична относительно биссектрисы I и III координатных углов (т. е. относительно прямой  $OK$ ).

Пусть точка  $A$  первой функции имеет координаты:  $x = BA = a$ ;  $y = OB = b$ .

Построим соответствующую ей точку второй функции с координатами:  $x_1 = OB = OB' = b$  и  $y_1 = BA = B'A' = a$ .

$\triangle OBA = \triangle OB'A'$ , как прямоугольные треугольники с равными катетами; значит,  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $OA = OA'$ .

По построению  $\angle YOK = \angle XOK = 45^\circ$ ; отняв от них по равному углу:  $\angle 1 = \angle 2$ , имеем:  $\angle KOA = \angle KOA'$ .

Стало быть,  $OK$  есть биссектриса угла при вершине равнобедренного  $\triangle AOA'$ , иначе говоря, точки  $A$  и  $A'$  симметричны относительно прямой  $OK$ , что и требовалось доказать.

(Если точка  $A$  берется в других координатных углах, доказательство ведется аналогично.)

Таким образом, если построен график прямой функции, то график обратной функции получается посредством отражения графика прямой функции от биссектрисы I координатного угла (для чего достаточно перегнуть чертеж по этой биссектрисе и скопировать линию с одной половины листа на другую).

График обратной функции удобно строить на том же чертеже, что и график прямой функции; таблицу координат точек удобно строить при этом одну для обеих функций, но с двумя входами.

Пусть, например, строятся графики двух взаимно обратных функций:  $y = x^2$  и  $y = \pm\sqrt{x}$  (рис. 62)<sup>1</sup>.

Общая таблица координат точек для построения этих графиков будет выглядеть так:

<sup>1</sup> Подобно тому как для однозначной функции  $y = \sin x$  удобно вначале строить отражением график многозначной обратной функции  $y = \text{Arc} \sin x$ , также дидактически оправдано однозначной прямой функции  $y = x^2$  противопоставить двузначную обратную функцию  $y = \pm\sqrt{x}$ .



Прямая функция							
$x$	$\pm 2$	$\pm \frac{3}{2}$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{2}$	0	$y = \pm \sqrt[3]{x}$	
$y = x^3$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$x$	
							Обратная функция

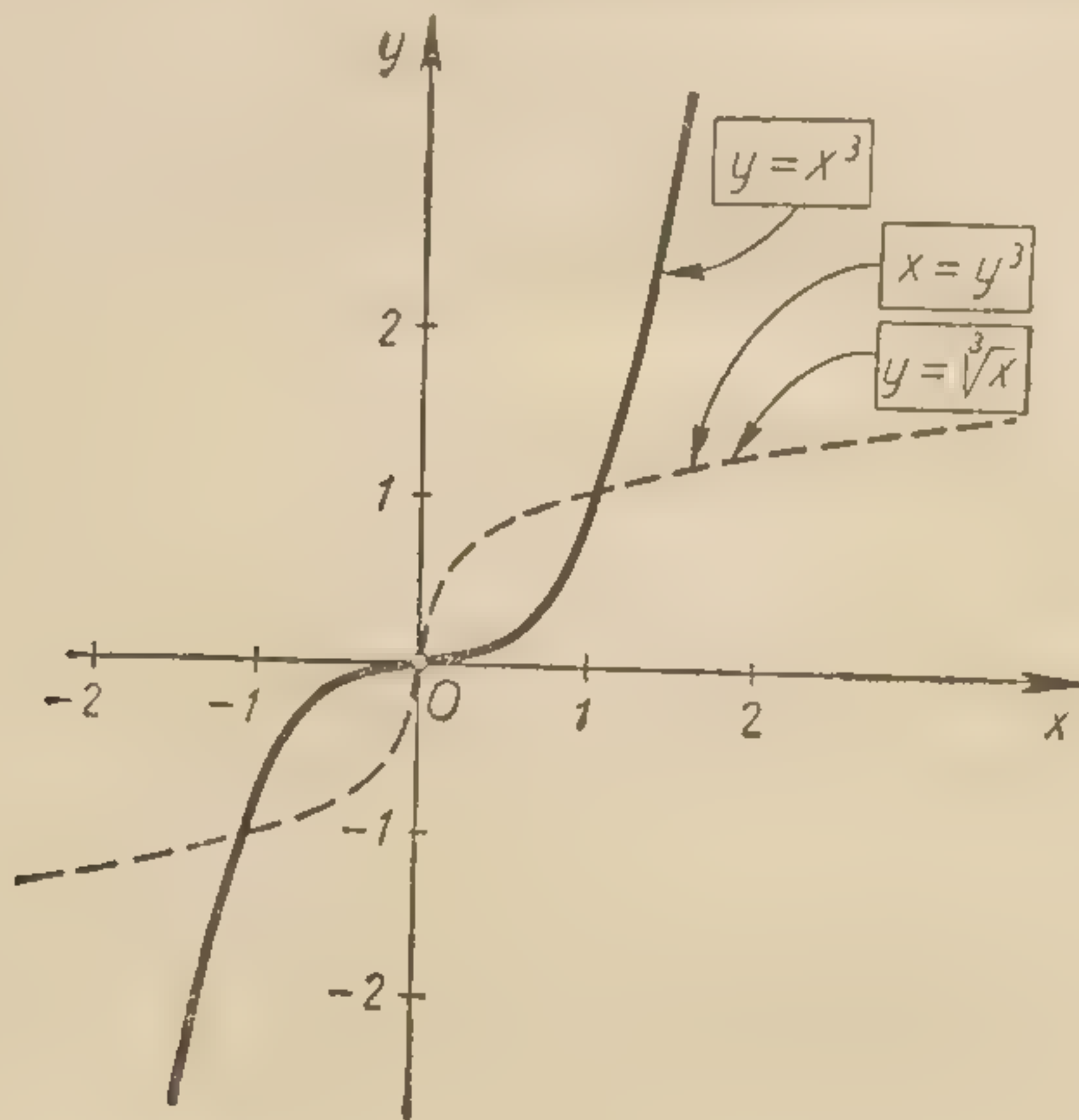


Рис. 63

Для построения графиков взаимно обратных функций  $y = x^3$  и  $y = \sqrt[3]{x}$  (рис. 63) составляется следующая таблица:

Прямая функция									
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$y = x^{\frac{1}{3}}$	
$y = x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27	$x$	
									Обратная функция



Понятие «обратная функция» может быть введено уже при изучении линейной функции, так как основная теорема о свойствах взаимно обратных функций доказывается лишь на основе равенства треугольников.

Пусть построена прямая:  
 $y = 0,5x - 2.$  (I)

Составим уравнение обратной функции в два этапа:

1) поменяем в уравнении (I) местами переменные  $x$  и  $y$ :

$$x = 0,5y - 2; \quad (II)$$

2) Решим уравнение (II) относительно  $y$ :

$$y = 2x + 4. \quad (III)$$

Уравнения (I) и (III) выражают взаимно обратные линейные функции; их графики изображены на рис. 64.

Точка пересечения прямых (I) и (III) дает решение симметричной системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 0,5x - 2, \\ x = 0,5y - 2. \end{cases}$$

Решение.  $x_1 = -4;$   
 $y_1 = -4.$

Пусть дана функция  
 $y = \frac{1}{2}x^2.$  (I)

Составим обратную функцию, для чего:

1) Напишем сначала уравнение обратной функции в неявной форме:

$$x = \frac{1}{2}y^2, \quad (II)$$

2) Решим уравнение (II) относительно  $y$ :  $y = \pm\sqrt{2x}.$  (III)

Функции (I) и (III) являются взаимно обратными; их графиками явля-

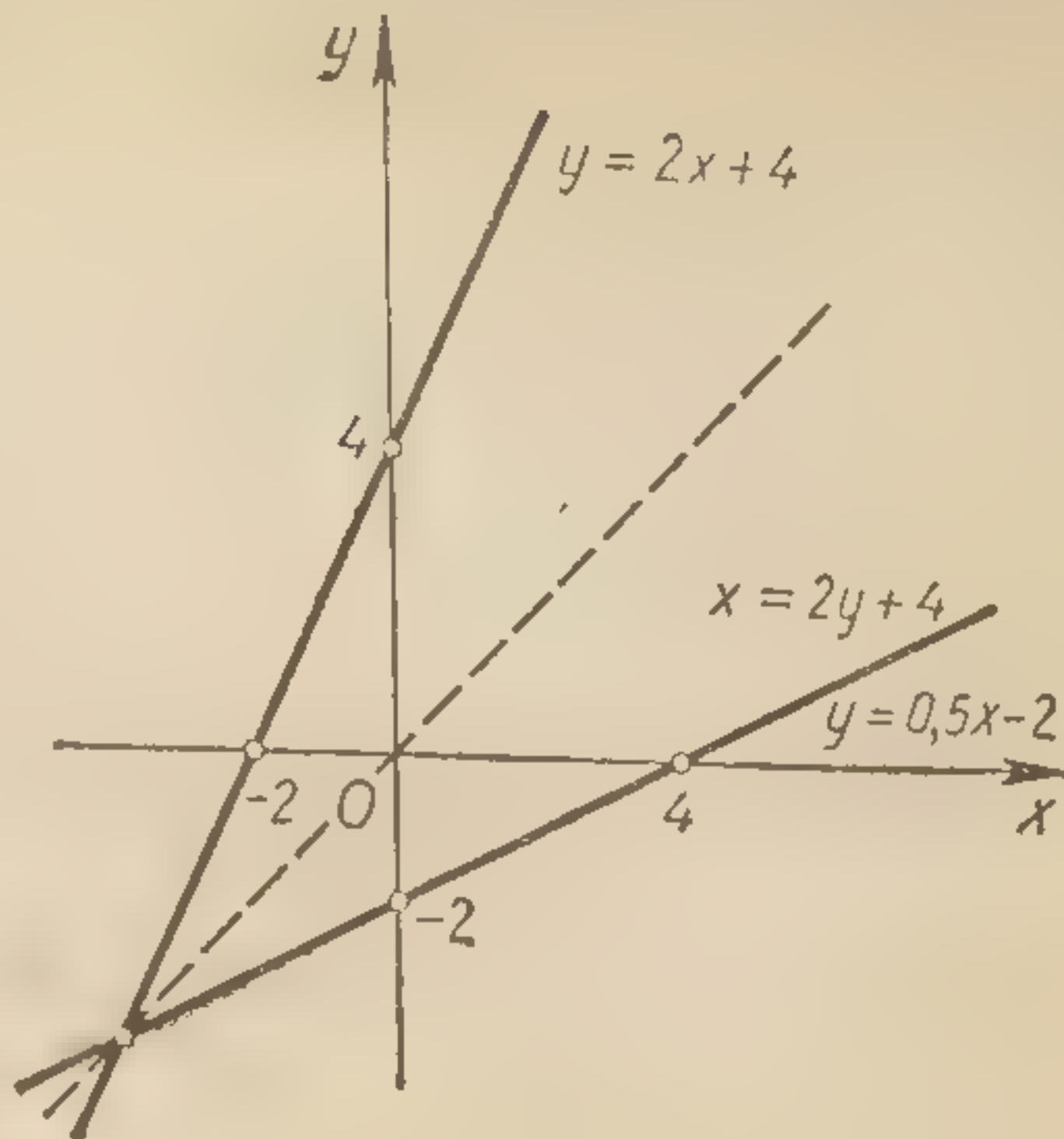


Рис. 64

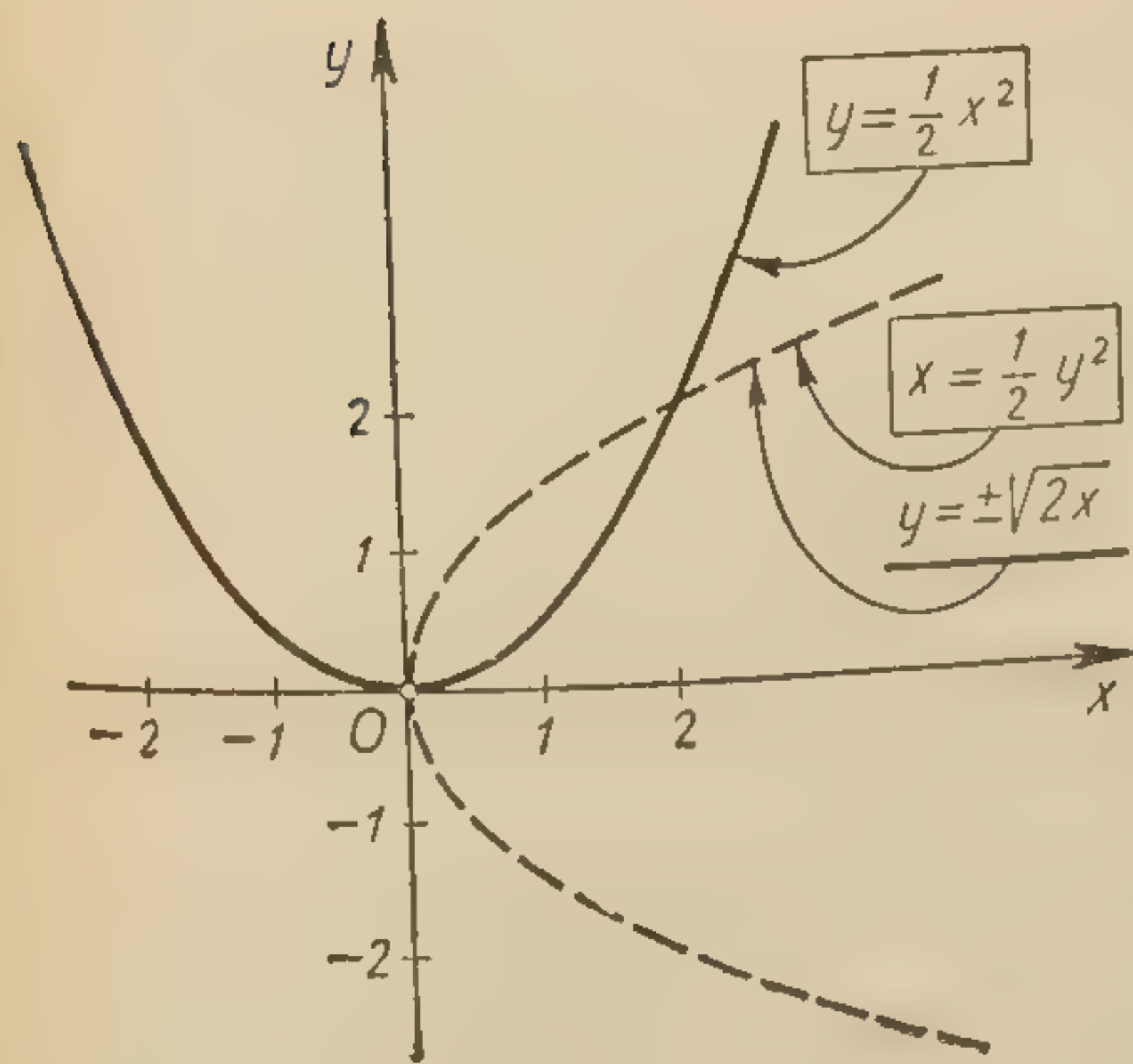


Рис. 65



ются параболы, симметричные друг другу относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 65).

Точки пересечения графиков (I) и (III) дают решения симметрической системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \quad \text{Решение.} \quad \begin{cases} x_1 = 0; y_1 = 0; \\ x_2 = 2; y_2 = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим общий случай:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1; \\ y + 3 &= 2(x + 1)^2. \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(Ia)} \end{matrix} \text{ или}$$

Составим уравнение обратной функции, для чего:

1) напомним его уравнение в неявной форме:

$$\begin{aligned} x &= 2y^2 + 4y - 1; \\ x + 3 &= 2(y + 1)^2; \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{(II)} \\ \text{(IIa)} \end{matrix} \text{ или}$$

2) Решим уравнение (II) относительно  $y$  (для чего предварительно уравнение (I) преобразуем к виду (IIa)).

Далее имеем последовательно:

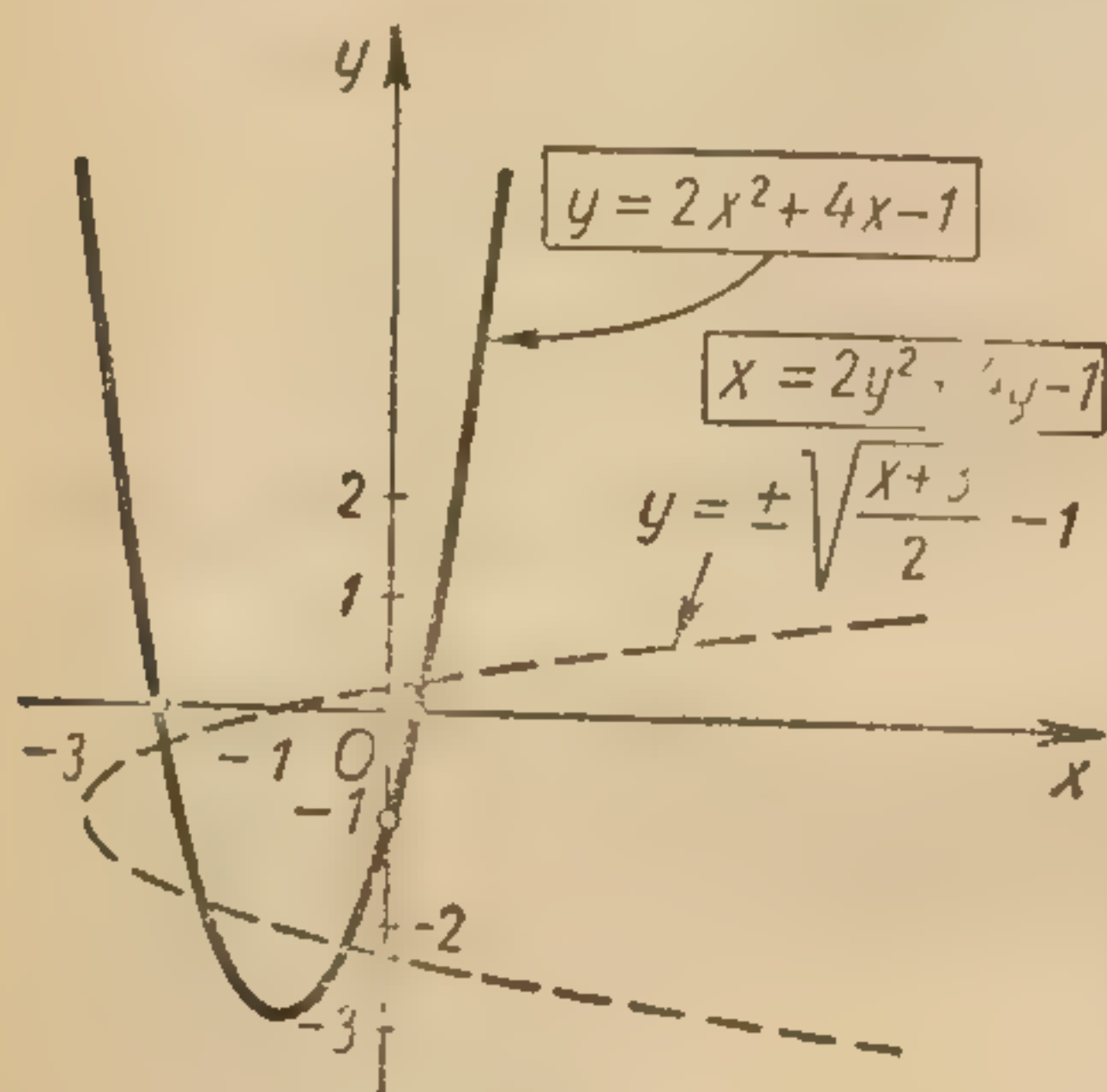


Рис. 66

$$\frac{x+3}{2} = (y+1)^2; \quad \text{(IIб)}$$

$$y+1 = \pm \sqrt{\frac{x+3}{2}}; \quad \text{(IIв)}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1. \quad \text{(IIг)}$$

Таким образом, уравнения (I) и (IIг) являются уравнениями взаимно обратных функций, выраженных в явной форме.

Чтобы построить график (IIг), достаточно отразить график функции (I) от биссектрисы первого координатного угла (рис. 66).

Точки пересечения двух парабол дают решения симметрической системы уравнений второй степени:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1; \\ x &= 2y^2 + 4y - 1. \end{aligned}$$

Так как такие системы разрешаются аналитически, то решения, полученные графически, могут быть проверены аналитическим решением.

Нередко в  
сводят в основ  
которых вычисл  
Но для разв  
лезно сочетать  
уравнениям со  
лению уравнен  
Рассмотрим  
1. Составим  
ей через точки  
Если мы по  
параметрическо  
уравнений с тр  
ров. Получаетс

Решив эту  
Искомое у  
2. Парабол  
через точки А  
Решение п  
Это же за  
Парабола  
Найти ее ур  
Решен

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$$

Итак, ис

3. Найт  
ку  $(-3; 3)$   
Реше



## 16. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛ

Нередко в школе изучение графиков квадратного трехчлена сводят в основном к построению графиков по точкам, координаты которых вычисляются по заданному уравнению.

Но для развития логического мышления учеников весьма полезно сочетать упражнения на построение графиков по заданным уравнениям со структурно обратными упражнениями (по составлению уравнений, удовлетворяющих определенным условиям).

Рассмотрим некоторые разновидности таких упражнений.

1. Составить уравнение параболы  $y = mx^2 + nx + k$ , проходящей через точки (2; 3), (4; 3) и (3; 5).

Если мы подставим координаты трех точек в соответствующее параметрическое уравнение, то получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными относительно искомых параметров. Получается следующая система:

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 4 + n \cdot 2 + k, \\ 3 = m \cdot 16 + n \cdot 4 + k, \\ 5 = m \cdot 9 + n \cdot 3 + k. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем:  $m = -2$ ;  $n = 12$ ;  $k = -13$ .

Искомое уравнение  $y = -2x^2 + 12x - 13$ .

2. Парабола, симметричная относительно оси  $Y$  проходит через точки  $A(2; 1)$ ,  $B(5; 3)$ . Найти уравнение кривой.

Решение проверить.

Это же задание в более легкой формулировке выглядит так:

Парабола  $y = ax^2 + b$  проходит через точки  $A(2; 1)$ ,  $B(5; 3)$ .

Найти ее уравнение.

Решение.

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + b, \\ y_2 = ax_2^2 + b; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a \cdot 4 + b, \\ 3 = a \cdot 25 + b, \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{2}{21}, \\ b = \frac{13}{21}. \end{cases}$$

Итак, искомое уравнение следующее:

$$y = \frac{2}{21}x^2 + \frac{13}{21}.$$

3. Найти уравнение параболы  $y = ax^2$ , проходящей через точку  $(-3; 3)$ .

Решение. Подставим в уравнение параболы значения:

$$x = -3, \quad y = 3.$$



Получим:  $3 = a(-3)^2$ ;  $a = \frac{1}{3}$ .

Искомое уравнение  $y = \frac{1}{3}x^2$ .

В предыдущих упражнениях на составление функций мы рассматривали лишь аналитическую сторону вопроса. Во многих случаях целесообразно не ограничиваться составлением уравнения, а завершать упражнение построением графика полученной функции.

Полезно изредка предлагать составить систему уравнений второй степени, используя в условии задания геометрические термины.

4. Написать уравнения параболы  $ax^2 + y = b$  и прямой  $cx + y = d$ , пересекающихся в точках  $A(3; 4)$  и  $B(-4; 5)$ .

Решение.

Требуется составить систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + y = b, \\ cx + y = d, \end{cases}$$

имеющую решения:  $x_1 = 3, \quad x_2 = -4,$   
 $y_1 = 4; \quad y_2 = 5.$

Выполнение упражнения сводится к определению коэффициентов  $a$  и  $b$  первого уравнения по двум решениям:

$$\begin{cases} a \cdot 9 + 4 = b, \\ a \cdot 16 + 5 = b \end{cases}$$

и коэффициентов  $c$  и  $d$  второго уравнения по тем же двум решениям:

$$\begin{cases} c \cdot 3 + 4 = d, \\ c \cdot (-4) + 5 = d. \end{cases}$$

Искомая система:

$$\begin{cases} x - 7y = -19, \\ x + 7y = 31. \end{cases}$$

Найденная система проверяется подстановкой в нее корней, либо решается графически.

Рассмотренные виды синтетических упражнений можно предлагать не только в связи с изучением параболы, но и любой иной кривой.

Приведем два примера.

Написать уравнение окружности, проходящей через точки  $(1; 1)$  и  $(4; -3)$ .

Решение.

Напишем уравнение окружности в общем виде:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



Подставляя в это уравнение поочередно значения неизвестных, получим систему трех линейных уравнений относительно  $a, b, c$ :

$$\begin{cases} 1^2 + 1^2 + a + b + c = 0, \\ 2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0, \\ 4^2 + (-3)^2 + 4a - 3b + c = 0. \end{cases}$$

Остальное ясно.

Пусть теперь предложено написать уравнение гиперболы  $xy + ax + by = 0$  и прямой  $cx + y + d = 0$ , пересекающихся в точках  $A(3; 4)$ ,  $B(-4; 5)$ .

Решение.

Параметры гиперболы  $a$  и  $b$  определяем из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 + 3a + 4b = 0, \\ (-4) \cdot 5 - 4a + 5b = 0. \end{cases}$$

Параметры прямой  $c$  и  $d$  определяем из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} 3c + 4 + d = 0, \\ -4c + 5 + d = 0. \end{cases}$$

Остальное очевидно.

## 17. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЗАДАНЫМ ГРАФИКАМ

Большинство упражнений, связанных с графиками функций, обычно сводится к построению графика функции по заданному уравнению.

Полезно иногда это упражнение преобразовать в обратное, предлагая по заданному графику функции составить ее уравнение,

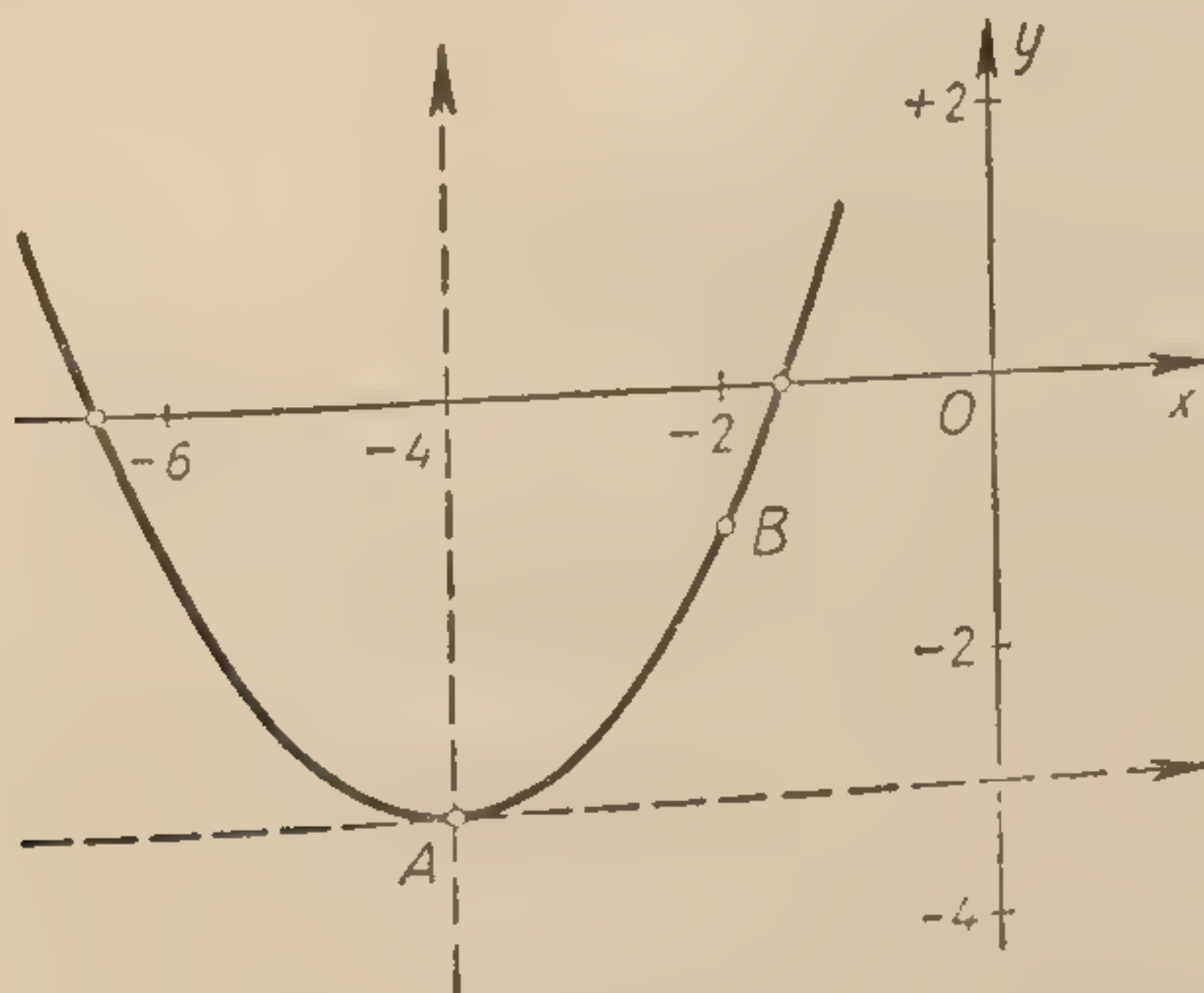


Рис. 67



иначе говоря, перейти от графического задания функции к аналитическому заданию.

1. Пусть дан график некоторой функции (рис. 67).

Требуется определить уравнение этой функции.

Чтобы решить эту задачу, ученик сначала определяет (предположительно) вид кривой (параболы), далее записывает уравнение параболы в общем виде:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (I)$$

Для определения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  необходимо решить систему трех уравнений первой степени, получаемую при подстановке в (I) координат каких-либо трех точек.

Однако проще поступить так: напишем уравнение параболы в таком виде:

$$y + k = a(x + p)^2. \quad (II)$$

Координаты вершины параболы мы можем определить по графику:  $A (-4; -3)$ .

Отсюда имеем:  $p = +4$ ,  $k = +3$ .

Подставив эти значения в уравнение (II), имеем:

$$y + 3 = a(x + 4)^2.$$

Для определения коэффициента  $a$  достаточно подставить координаты еще одной точки параболы (отличающейся от вершины параболы).

По графику выбираем, скажем, точку  $B (-2; -1)$  и подставим ее координаты в уравнение (II):

$$\begin{aligned} -1 + 3 &= a(-2 + 4)^2; \\ 2 &= a \cdot 4; \quad a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Имеем уравнение  $y + 3 = \frac{1}{2}(x + 4)^2$ .

Раскрыв скобки, имеем:  $y = 0,5x^2 + 4x - 5$  ( $a = 0,5$ ;  $b = 4$ ;  $c = -5$ ).

Таким образом, вместо трех точек мы обошлись двумя точками: вершина параболы является как бы двойной точкой для уравнения (I).

2. На рис. 68 изображена прямая. Найти ее уравнение.

Решение.

Напишем уравнение прямой в общем виде:  $ax + by + c = 0$  (I).

Определим по графику координаты двух точек прямой и подставим в уравнение (I); в качестве этих точек удобнее взять точки пересечения прямой с осями координат:  $A (0; 4)$  и  $B (3; 0)$ .

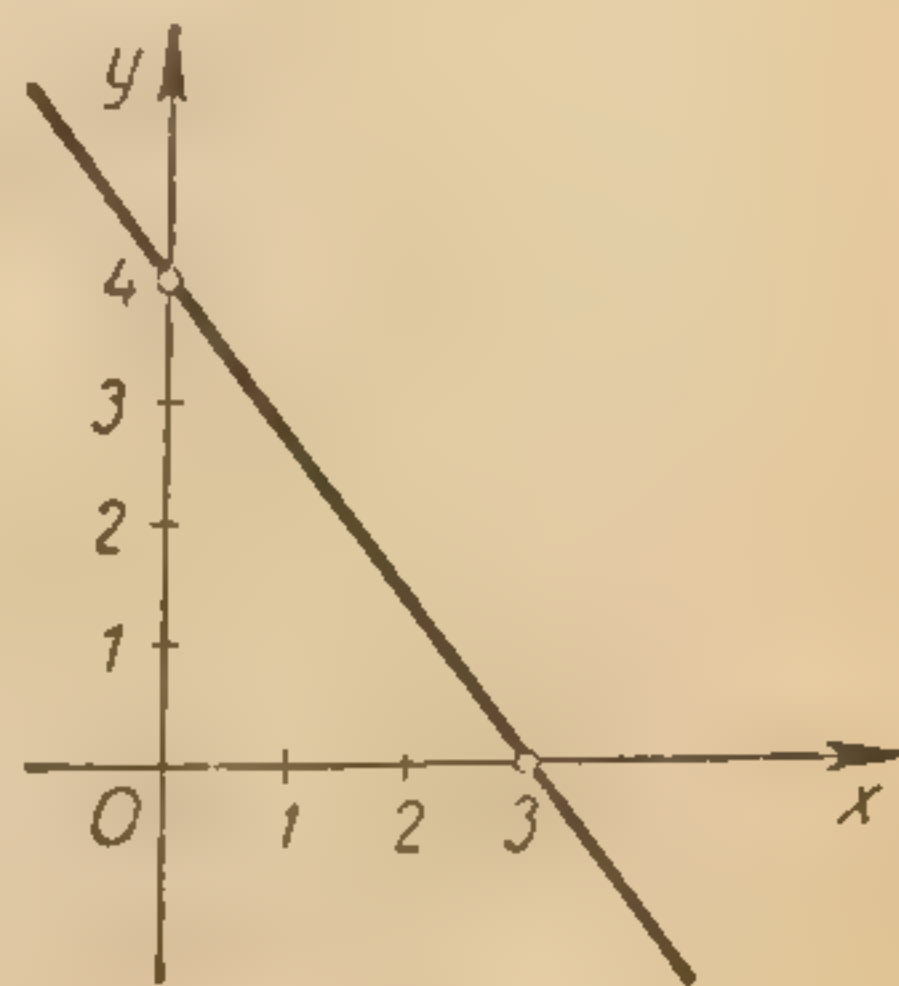


Рис. 68



Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + b \cdot 4 - c &= 0, \\ a \cdot 3 + b \cdot 0 - c &= 0. \end{aligned}$$

Откуда находим:  $b = -\frac{c}{4}$ ;  $a = -\frac{c}{3}$ .

Подставим эти значения в (I):  $\frac{cx}{3} + \frac{cy}{4} - c = 0$ .

Разделив обе части уравнения на  $c$ , получим:  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 1 = 0$ .

Искомое уравнение следующее:

$$4x + 3y - 12 = 0 \quad (a = 4; b = 3; c = 12).$$

## 18. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Построение графиков функций  $y=x^2$ ,  $y=x^3$ ,  $y=a^x$  чаще всего выполняют только аналитически, т. е. положения опорных точек на координатной плоскости определяют по вычисленным координатам. (В то же время графики основных тригонометрических функций  $y = \sin x$ ,  $y = \lg x$  обычно строят геометрически.)

Между тем геометрическое построение графиков и геометрическое преобразование построенных графиков выполняется быстрее, чем с помощью вычислений.

Важно также учитывать большую познавательную ценность и политехническую направленность этих упражнений, развивающих навыки работы с чертежными инструментами.

Геометрически можно строить графики всех основных функций, изучаемых в школе:  $y = x^2$ ;  $y = \frac{a}{x}$ ,  $y = x^3$ ;  $y = a^x$ ; (графики

обратных им функций  $y = \pm x^{\frac{1}{2}}$ ;  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $y = \log x$  строятся отражением графиков прямых функций от биссектрисы I координатного угла).

Выполнение этих упражнений основано на построении четвертого пропорционального отрезка к трем данным отрезкам; поэтому этот материал хорошо связать и с изучением геометрии.

Приводимый ниже материал в основном может быть использован на уроках алгебры при изучении соответствующих функций, часть материала может быть дана в качестве иллюстрации алгебраического метода решения геометрических задач (например, построение парабол).

В предлагаемом способе построения параболы, как и вообще во всех построениях, рассматриваемых в данном параграфе, мы обходимся всегда только осями координат (или линиями, параллельными им); кроме того, проводим отдельные прямые, проходящие через две определенные точки плоскости.



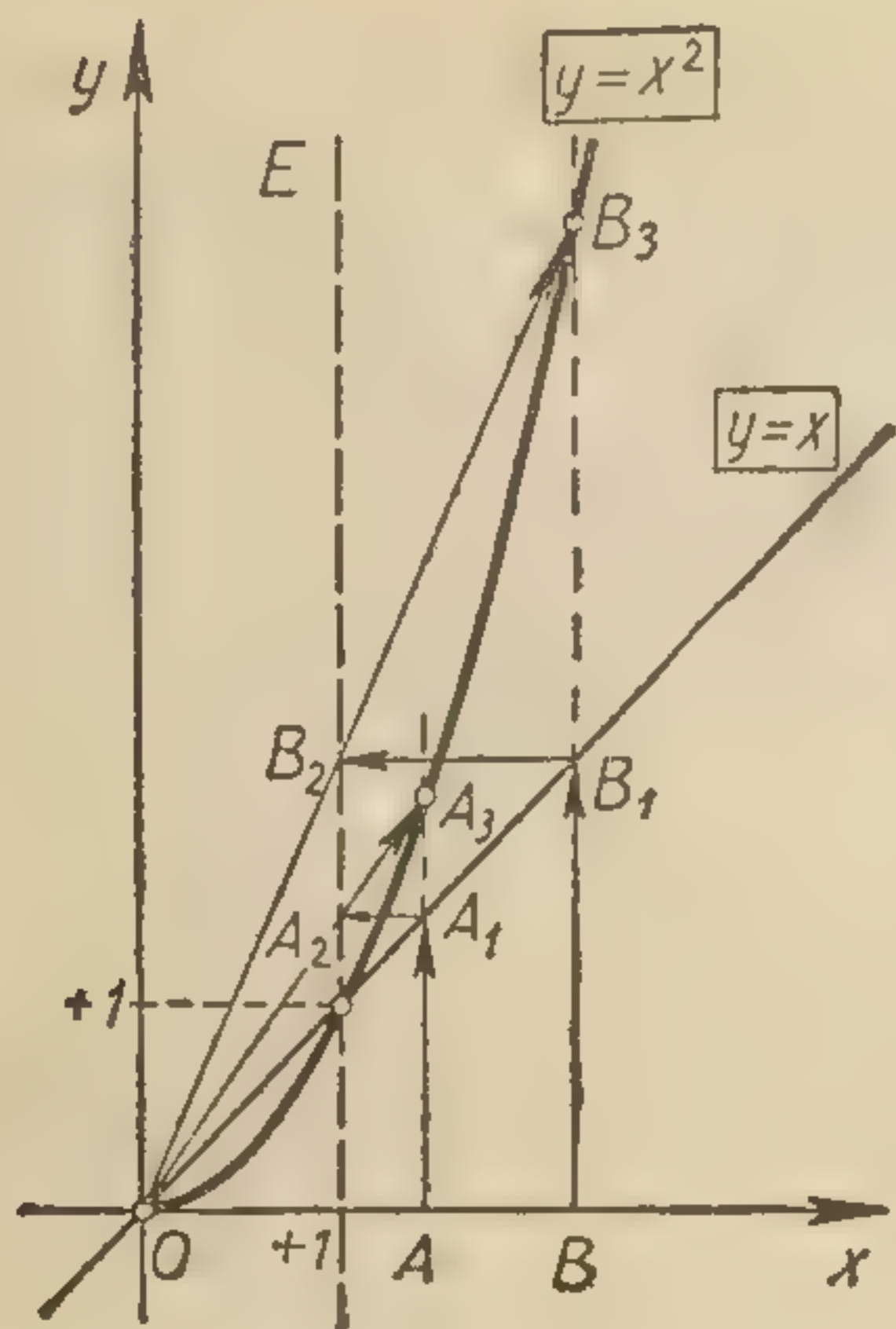


Рис. 69

В большинстве описанных построений мы обходимся одной линейкой (в предположении, что график строится на клетчатой или миллиметровой бумаге).

Построение графиков функции:  $y = x^2$  и  $y = ax^2$ .

Пусть требуется построить геометрически график квадратной функции  $y = x^2$ .

Иначе говоря, надо построить график произведения функций:  $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ , где  $f_1(x) = x$  и  $f_2(x) = x$ .

Последовательность построения любой точки параболы такова:

1. Сначала строим график прямой  $y = x$  (рис. 69).

2. Построим прямую  $IE$ , параллельную оси ординат, на расстоянии единицы от начала координат (кроме

определения таким образом единичного отрезка, больше никакие деления не откладываются на осях координат).

3. В произвольной точке  $A$  оси  $OX$  восставим перпендикуляр  $AA_1$  до пересечения с прямой  $y = x$  в точке  $A_1$ .

4. Точку  $A_1$  проектируем на прямую  $IE$  в точку  $A_2$ .

5. Проводим  $OA_2$  до пересечения с прямой  $AA_1$  в точке  $A_3$ .

Точка  $A_3$  — искомая точка параболы с абсциссой  $OA = x$ . В самом деле,  $\triangle OA_2I \sim \triangle OA_3A$ , откуда следует:

$$\frac{OI}{IA_2} = \frac{OA}{AA_2},$$

но  $OI = 1$ ,

$IA_2 = AA_1 = OA = x$ . Значит,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{AA_3}; \quad AA_3 = x^2, \text{ т. е. } y = x^2.$$

Соединив плавной линией (лекалом) несколько точек параболы, полученных указанным образом, мы построим правую ветвь параболы; левую ее ветвь строим отражением правой ветви относительно оси  $OY$ . (На чертеже показано построение еще одной точки параболы  $B_3$ .)

Пусть требуется построить параболу  $y = \frac{2}{3}x^2$ .

Представим функцию  $y = \frac{2}{3}x^2$  в виде произведения двух функций:  $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ , где  $f_1(x) = \frac{2}{3}x$ ,  $f_2(x) = x$ .



Последовательность построения любой точки параболы  $y = \frac{2}{3}x^2$  та-

кова:

1. Сначала построим график прямой  $y = \frac{2}{3}x$  (рис. 70).

Проводим  $IE \parallel OY$  на расстоянии 1 от оси ординат.

2. В произвольной точке  $A$  оси  $OX$  восставим перпендикуляр  $AA_1$  до пересечения с прямой  $y = \frac{2}{3}x$  в точке  $A_1$ .

3. Точку  $A_1$  проектируем на прямую  $IE$  в точку  $A_2$ .

4. Проводим  $OA_2$  до пересечения с прямой  $AA_1$  в точке  $A_3$ . Точка  $A_3$  — искомая точка параболы с абсциссой  $OA = x$ .

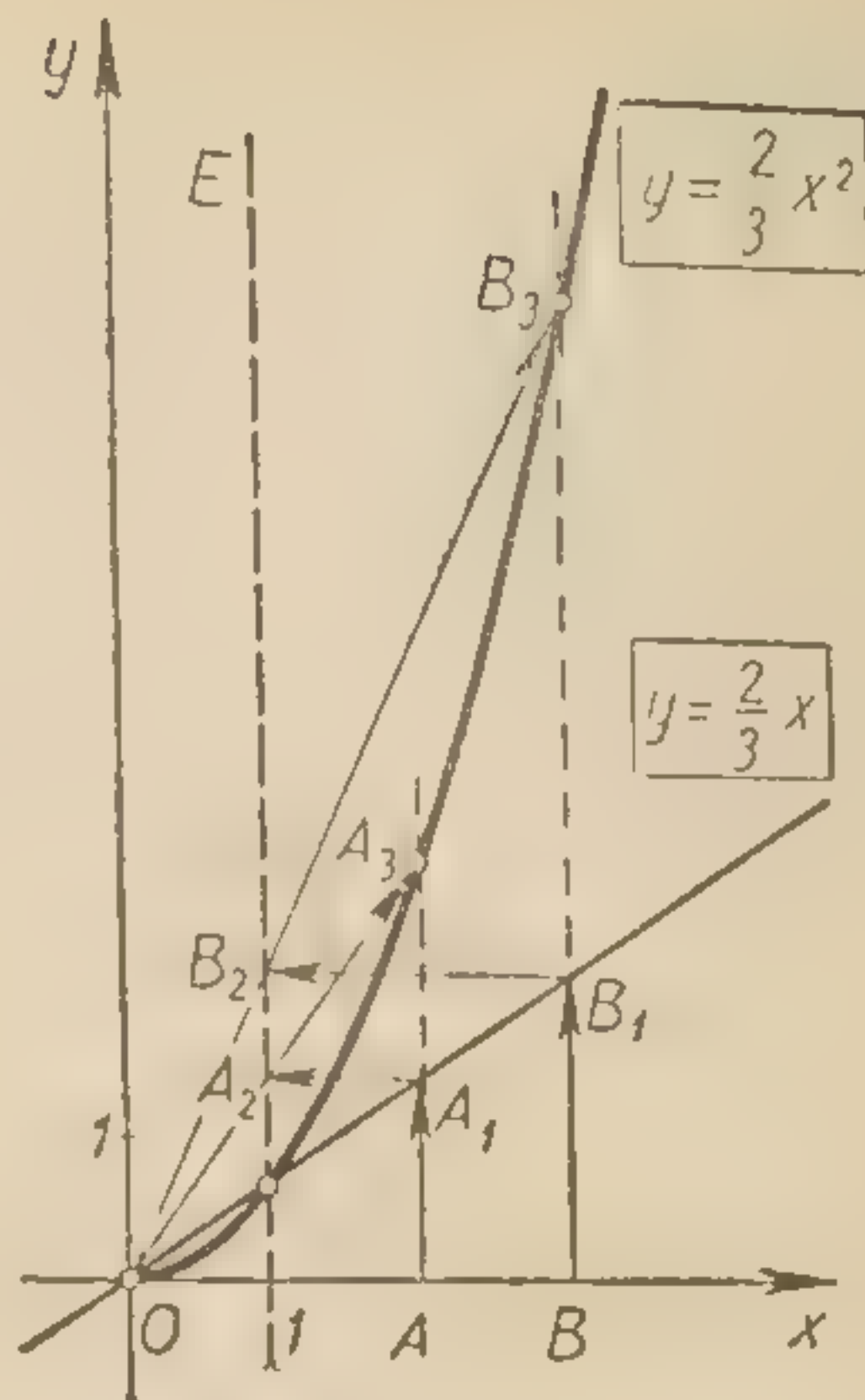


Рис. 70

Доказательство проводится так же, как и в предыдущей задаче.

Построение графиков функций:  $y = x^3$  и  $y = ax^3$ .

Пусть требуется *построить* график функции  $y = x^3$ .

Представим эту функцию как произведение двух функций:

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x), \text{ где } f_1(x) = x^2 \text{ и } f_2(x) = x.$$

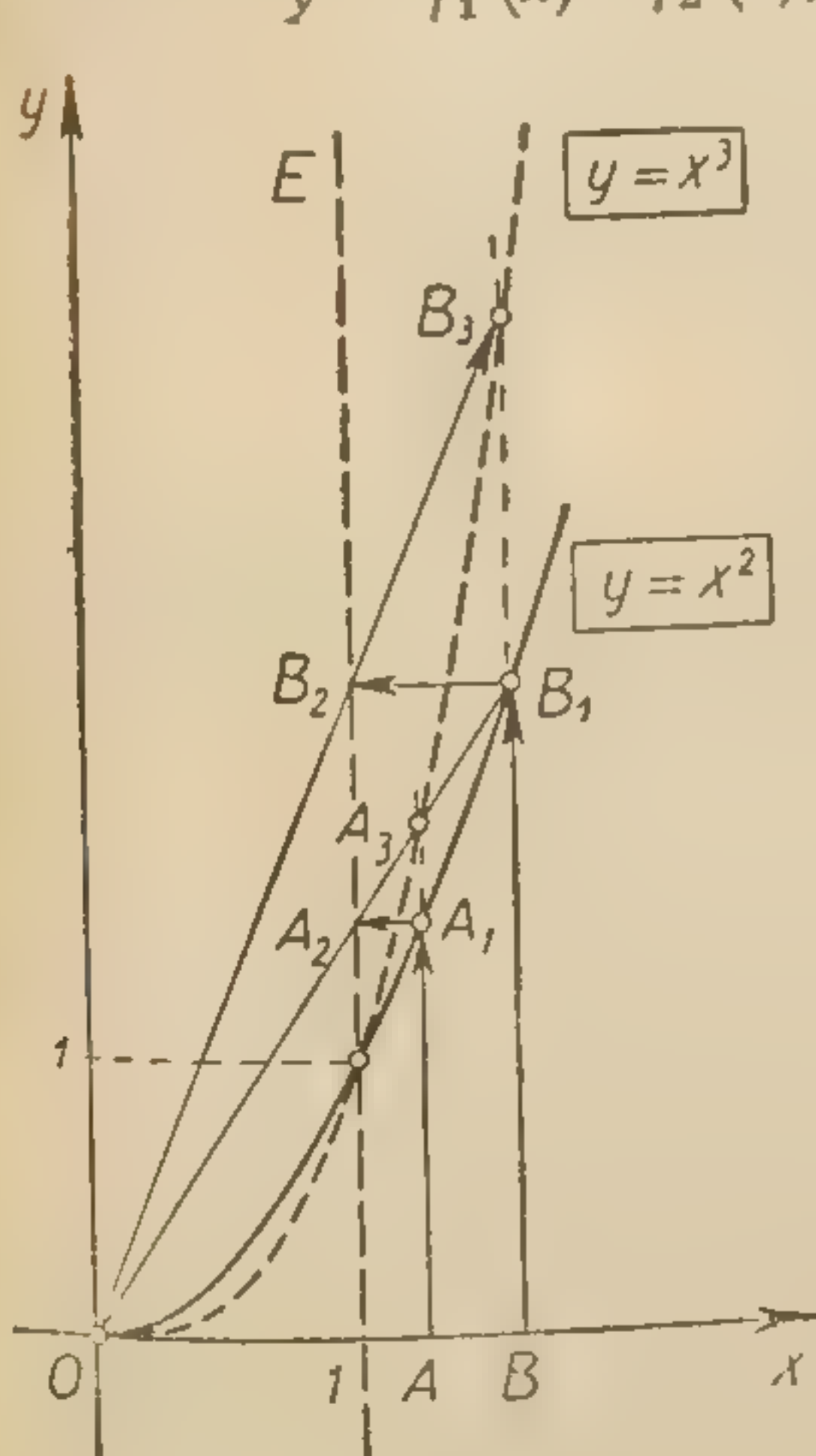


Рис. 71

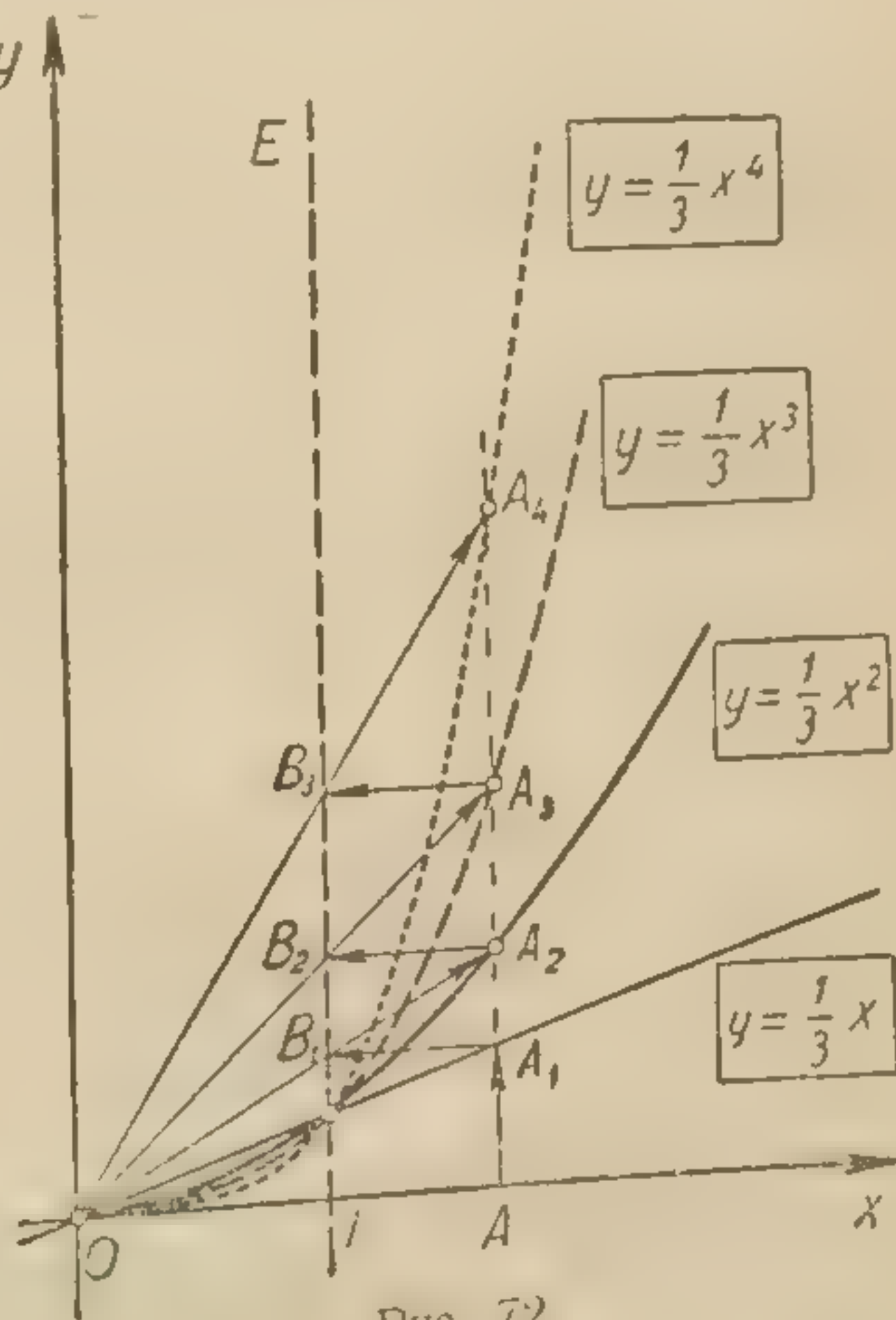


Рис. 72



Если построена парабола  $y = x^2$ , то дальнейшие построения проводятся в следующей последовательности (рис. 71):

1. Пусть  $OA = x$ ; проведем  $AA_1 \perp OX$  до пересечения в точке  $A_1$  с параболой  $y = x^2$ .
2. Проводим  $A_1A_2 \parallel OX$  до пересечения с прямой  $lE$  в точке  $A_2$ .
3. Проводим  $OA_2$  до пересечения с прямой  $AA_1$  в точке  $A_3$ .  
Точка  $A_3$  является точкой кубической параболы  $y = x^3$  с абсциссой  $x = OA$ .

Существует иной способ построения графика функции  $y = ax^3$  на основе только графика прямой  $y = ax$ .

Пусть требуется *построить график кубической параболы*  $y = \frac{1}{3}x^3$  (рис. 72).

1. Сначала построим график прямой  $y = \frac{1}{3}x$ .
2. В произвольной точке  $A$  оси абсцисс восставим к ней перпендикуляр  $AA_1 \perp OX$  до пересечения с прямой  $y = \frac{1}{3}x$  в точке  $A_1$ .
3. Проведем  $A_1B_1 \parallel OX$  до пересечения с прямой  $lE$  в точке  $B_1$ .  
Точка  $A_2 = OB_1 \times AA_1$  есть точка<sup>1</sup> параболы  $y = \frac{1}{3}x^2$ .
4. Проведем  $A_2B_2 \parallel OX$  до пересечения с прямой  $lE$  в точке  $B_2$ .
5. Точка  $A_3 = OB_2 \times AA_1$  есть точка параболы  $y = \frac{1}{3}x^3$  (при  $OA = x$ ).

Продолжая эту операцию, можно в принципе строить графики степенных функций, показателем которых являются любые целые положительные числа:  $y = ax^4$ ;  $y = ax^5$ ;  $y = ax^6$  и т. п.<sup>2</sup>

После небольшой практики в геометрическом построении ученики научаются находить точки графика ( $A_2$ ,  $A_3$  и т. д.) при помощи приложения линейки, не проводя вспомогательных прямых (если построения выполняются на бумаге с квадратной сеткой).

Например, для определения положения точки  $A_3$  достаточно провести воображаемые прямые:  $AA_1$ ,  $A_1B_1$ ,  $OB_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $OB_2$ ; причем прямые  $AA_1$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  совпадают с линиями координатной сетки, следовательно, линейка будет необходима лишь для визирования направлений  $OB_1$ ,  $OB_2$ .

**Построение графика функции  $y = \frac{a}{x}$ .**

Пусть требуется построить график функции  $y = \frac{3}{x}$  (рис. 73).

Построим систему координат  $XOY$ ; далее построим прямую  $lE$  (параллельную оси абсцисс), на расстоянии от нее 1 единицы и пря-

<sup>1</sup>  $\times$  — знак пересечения прямых.

<sup>2</sup> На этом основано геометрическое построение графика показательной и логарифмической функции; для построения графика  $y = 2^x$  находим, например, построением последовательно точки:  $(1, 2^1)$ ,  $(2, 2^2)$ ,  $(3, 2^3)$ ;  $(4, 2^4)$  и т. д.

мую  $MN$   
( $a = 3$ ).

Постро

1. Пр

2. Най

3. Най

4. Пр

Точка

абсциссо

В сам

что и т

На ч

ответствен

1. ПРИЕ

При

шагов

сравни

развит



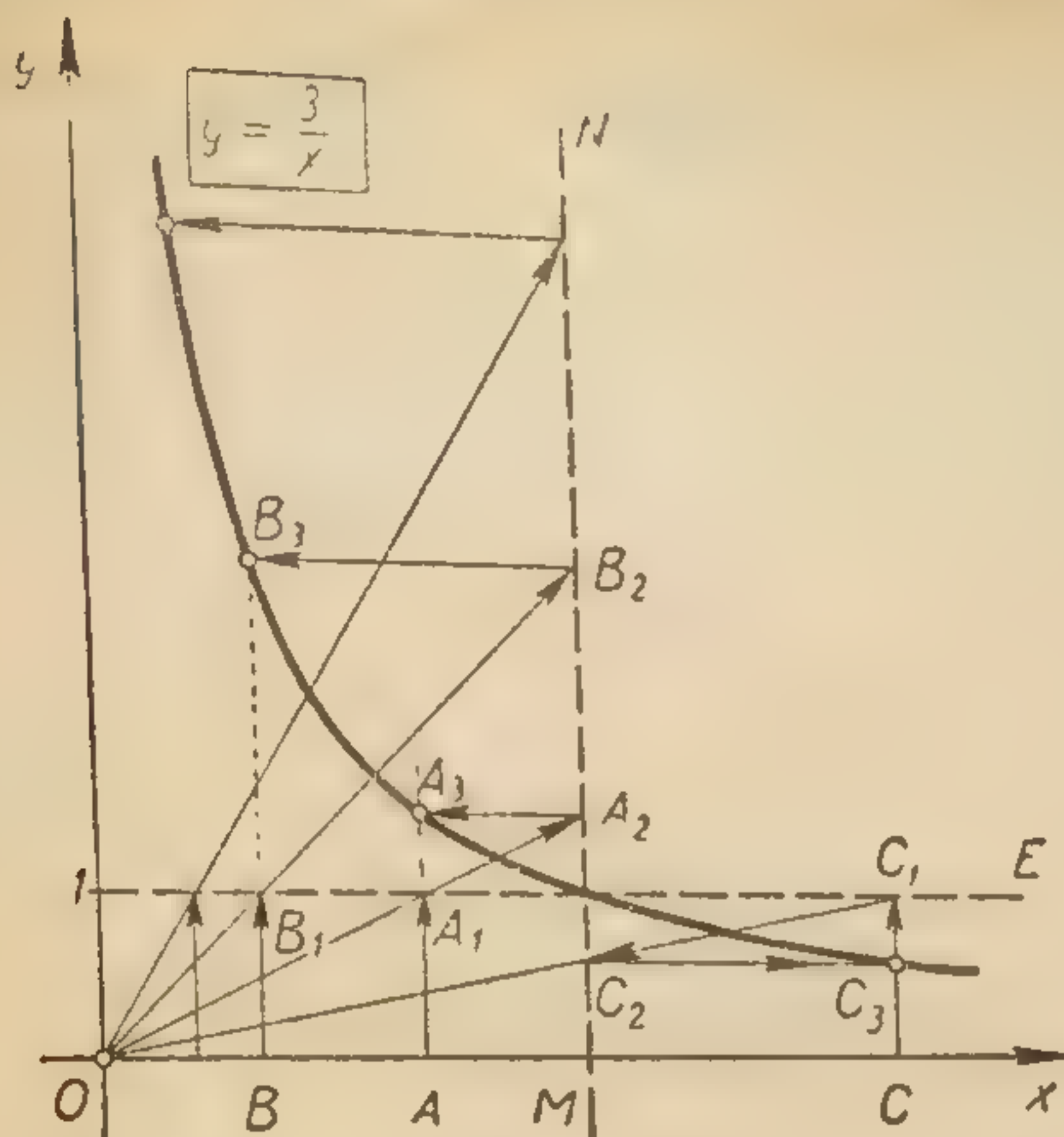


Рис. 73

мую  $MN$  (параллельную оси ординат) на расстоянии 3 единиц; ( $a = 3$ ).

Построим точку графика с абсциссой  $x = OA$ .

1. Проведем  $AA_1 \perp OM$ .
2. Найдем точку  $A_1 = AA_1 \times OE$ .
3. Найдем далее точку  $A_2 = OA_1 \times MN$ .
4. Проведем  $A_2A_3 \parallel OM$ .

Точка  $A_3 = A_2A_3 \times AA_1$  является точкой гиперболы  $y = \frac{3}{x}$  с абсциссой  $x = OA$ .

В самом деле,  $\triangle OAA_1 \sim \triangle OMA_2$ , откуда имеем:

$$\frac{AA_1}{A_2M} = \frac{OA}{OM}; \quad \frac{1}{A_2M} = \frac{x}{3}; \quad A_2M = \frac{3}{x},$$

что и требовалось доказать.

На чертеже дано еще построение точек гиперболы  $B_3$  и  $C_3$  соответственно с абсциссой  $x = OB$ ,  $x = OC$ .

#### ГЛАВА IV

### ЗАДАЧИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

#### 1. ПРИЕМ СРАВНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

При обучении решению задач алгебраическим методом с первых шагов необходимо осуществлять комплексный подход к задаче, сравнивать взаимосвязанные способы решения, что способствует развитию математического мышления.



Выражение зависимости между величинами задачи в разных формах одинаково важно на всех ступенях обучения.

А. Н. Боголюбов<sup>1</sup> обнаружил, что первоклассники не усваивают взаимосвязи понятий *старше — моложе*, *выше — ниже* и т. д., если ограничиваться набором задач, в котором эти задачи встречаются вне связи друг с другом.

Полезным оказалось одновременное решение двух взаимосвязанных задач. Например:

а) *Сестре 15 лет, а брату 10 лет. Кто из них старше и на сколько лет?*

б) *Сестре 15 лет, а брату 10 лет. Кто из них моложе и на сколько лет?*

Психологическая причина ошибок, заключающихся в подмене одного уравнения другим, например вместо уравнения  $24(x - 50) - 200 = 26x$  составляется «сопряженное» уравнение  $24(x + 50) + 200 = 26x$ , сходна с причиной непонимания первоклассниками двойственности понятия «старше — моложе».

Чтобы избежать подобных ошибок, работу над алгебраическими задачами полезно начинать с простейших упражнений по выражению связей между величинами и обязательно двумя способами.

Так, в пропедевтическом цикле упражнений VI класса уместны вопросы:

1. *Брат старше сестры на 5 лет. Выразить в двух видах эту зависимость с помощью неизвестных.*

О т в е т. I. Брату  $x$  лет, сестре  $(x - 5)$  лет.

II. Сестре  $y$  лет, брату  $(y + 5)$  лет.

2. *В совхозе земли в 1,6 раза больше, чем в колхозе. Выразить эту зависимость в двух видах.*

О т в е т. I. В совхозе  $x$  га земли, в колхозе  $\frac{x}{1,6}$  га земли.

II. В колхозе  $y$  га земли, в совхозе  $1,6 y$  га земли.

3. *Производительность труда опытного рабочего составляет 250% от производительности труда ученика. Выразить эту зависимость в двух формах.*

Р е ш е н и е.  $250\% = 2,5$ .

I. Опытный рабочий сделал  $x$  деталей, ученик  $\frac{x}{2,5}$  деталей.

II. Ученик сделал  $y$  деталей, опытный рабочий  $2,5 y$  деталей.

4. *Заработок сына составил  $\frac{5}{7}$  заработка отца. Выразить эту зависимость с помощью неизвестных, затем проверить на числах.*

<sup>1</sup> См.: А. Н. Боголюбов. Работа над словом при решении задач в арифметике в начальной школе. Пути повышения успеваемости по математике «Психолого-педагогические исследования учителей». Сборник статей, под ред. Н. А. Менчинской. М., Учпедгиз, 1955, стр. 20.



О т в е т. I. Отец заработал  $x$  руб., сын заработал  $\frac{5}{7}$  от  $x$ , т. е.  $\frac{5}{7}x$  руб.

II. Сын заработал  $y$  руб., отец заработал  $y : \frac{5}{7} = \frac{7}{5}y$ , т. е. больше сына, что и должно быть.

П р о в е р к а. Пусть заработок сына составляет 100 руб. Тогда заработок отца равен  $100 \cdot \frac{7}{5} = 140$  руб.

В самом деле,  $\frac{100}{140} = \frac{5}{7}$ .

Последний вопрос, как и предшествующие, надо предлагать в разных вариантах, привлекая другие термины и грамматические обороты, например:

4а. Отношение заработка сына к заработку отца равно  $\frac{5}{7}$ .

4б. Зарботок отца составляет  $\frac{7}{5}$  заработка сына и т. д.

В алгебре наряду с предыдущими способами сравнения величин используется также связывание двух значений посредством указания их суммы. Поэтому целесообразно тренировать учащихся и в применении суммы для символического изображения зависимости.

5. В классе было всего 35 учеников. Обозначить число мальчиков и число девочек двумя способами.

О т в е т. I. В классе было  $x$  мальчиков и  $(35 - x)$  девочек.

II. В классе было  $y$  девочек и  $(35 - y)$  мальчиков.

Выше были рассмотрены упражнения по замене сравнения, выраженного словами, символическим выражением его результата.

Эту форму упражнений целесообразно дополнить структурно противоположной формой, когда ученик заменяет символическое выражение зависимости словесным.

П р и м е р 1. Учитель пишет на доске:

Сыну  $x$  лет, отцу  $6x$  лет.

Как выразить в словах (не употребляя буквы  $x$ ) зависимость между возрастом сына и отца?

О т в е т. Отец старше сына в 6 раз (или сын моложе отца в 6 раз).

П р и м е р 2. В колхозе было засеяно  $x$  га кукурузой, а в совхозе  $\frac{1}{3}x$  га. Как выразить эту мысль, не употребляя буквы  $x$ ?

О т в е т. Площадь, занятая кукурузой в совхозе, составляет  $\frac{1}{3}$  площади, занятой кукурузой в колхозе.

Для уяснения сущности записи сравнения величин алгебраическим методом полезно показать ученикам процесс составления уравнения при решении задачи.



Учитель проводит примерно следующую беседу:

— Сейчас вы увидите, как составляется задача, решаемая алгебраическим методом. Слушайте внимательно, так как дома вы будете сами составлять и решать подобную задачу.

Для колхозного клуба купили баян, пианино и скрипку. Скажите мне приблизительно цены этих музыкальных инструментов.

После обсуждения на доске и в тетрадях записываются столбиком цены и помечается несколько способов выражения зависимостей между ними.

	I способ	II способ	III способ
Скрипка 60 руб.	$(x - 80)$ руб.	$y$ руб.	$\left(\frac{z}{4} - 80\right)$ руб.
Баян 140 руб.	$x$ руб.	$(y + 80)$ руб.	$\frac{z}{4}$ руб.
Пианино 560 руб.	$4x$ руб.	$(y + 80) \cdot 4$ руб.	$z$ руб.
Всего: 760 руб.	760 руб.	760 руб.	760 руб.

Далее учитель говорит:

— Чтобы составить задачу, надо указать общую стоимость покупки, а цены отдельных предметов дать в скрытом виде, т. е. выразить посредством сравнения.

Останавливаемся на одном из вариантов, например: пусть баян стоит  $x$  руб. ( $x = 140$ ). Сопоставим стоимость баяна со стоимостью скрипки посредством разностного сравнения. Тогда скрипка будет дешевле баяна на 80 руб. ( $140 - 60 = 80$ ).

Далее стоимость баяна сравним со стоимостью пианино для разнообразия другим способом (кратным сравнением): баян дешевле пианино в 4 раза:  $560 : 140 = 4$  (раза).

С помощью учеников учитель формулирует условие составленной задачи.

**Задача.** Для колхозного клуба купили баян, пианино и скрипку на общую сумму в 760 руб. Скрипка дешевле баяна на 80 руб., а баян дешевле пианино в 4 раза. Определить стоимость каждого музыкального инструмента.

Записав символическое выражение условия задачи, проводим решение:

$$\begin{aligned}(x - 80) + x + 4x &= 760; \\ x - 80 + x + 4x &= 760; \\ 6x &= 840; \\ x &= 140 \text{ и т. д.}\end{aligned}$$



При выполнении таких пропедевтических упражнений важно составить и решить несколько задач по одному сюжету.

II з а д а ч а. Пусть скрипка стоит  $y$  руб. Тогда баян будет стоить  $(y + 80)$  руб., а пианино в 4 раза дороже баяна и поэтому будет стоить  $(y + 80) \cdot 4$  руб.

Эту схему записываем рядом с предыдущей.

Уравнение:  $y + (y + 80) + (y + 80) \cdot 4 = 760$ .

Условие составленной задачи рассказывают ученики.

III з а д а ч а. Пусть пианино стоит  $z$  руб. Тогда баян будет стоить  $\frac{z}{4}$  руб., так как он дешевле пианино в 4 раза. Скрипка будет стоить  $(\frac{z}{4} - 80)$  руб.

Уравнение  $z + \frac{z}{4} + (\frac{z}{4} - 80) = 760$ .

К уравнению учащиеся формулируют соответствующую задачу.

В приведенных упражнениях запись соотношений между величинами в символической форме начинается не с неизвестных величин, как бывает обычно, а с известных, заранее намеченных чисел.

Это обстоятельство помогает ученикам абстрагировать зависимости (перейти от соотношения  $140 - 80 = 60$ , через  $140 - 80 = x$  к соотношению  $140 = x + 80$ , где  $(x + 80)$  — стоимость баяна).

Решение рассмотренной выше задачи основано на суммировании исходных величин ( $60 + 140 + 560 = 760$ ).

Можно составить и другие задачи так, чтобы решение их основывалось на использовании разностного сравнения и кратного сравнения.

Для краткости изложения воспользуемся предыдущей задачей.

Пусть выбранные числа и способы сравнения их друг с другом остаются прежними.

Разностное сравнение.

Скрипка	60 руб.	$x - 80$	} 200	560 - 200 = 360
Баян	140 руб.	$x$		
Пианино	560 руб.	$4x$		
			560	$4x - [x + (x - 80)] = 360$

В приведенной схеме кратко изображена последовательность операций при составлении задачи.

З а д а ч а. Для колхозного клуба купили скрипку, баян и пианино. Скрипка на 80 руб. дешевле баяна, а пианино в 4 раза дороже баяна и скрипки, вместе взятых, на 360 руб. Сколько стоит каждый музыкальный инструмент в отдельности?

Уравнение:  $4x - [x + (x - 80)] = 360$ .



Кратное сравнение.

Так как  $\frac{560}{200} = 2,8$ , то имеем задачу, которая отличается от предшествующей задачи лишь фразой:

...известно, что пианино дороже скрипки и баяна, вместе взятых, в 2,8 раза.

Уравнение:  $4x = [x + (x - 80)] \cdot 2,8$ .

Суммирование.

Наряду с кратным и разностным сравнением для связывания величин можно использовать суммирование:

Скрипка и баян стоят вместе  $60 + 140 = 200$  (руб.). Если в условие ввести число 200, тогда одна из задач будет выглядеть так:

Скрипка	60 руб.	} 200 руб.	$x$	$200 - x$
Баян	140 руб.		$200 - x$	$x$
Пианино	560 руб.		$4(200 - x)$	$4x$

**Задача.** Для колхозного клуба купили скрипку, баян и пианино за 760 руб. Скрипка и баян стоят вместе 200 руб., а пианино в 4 раза дороже баяна. Определить стоимость каждого инструмента в отдельности.

Уравнения: 1)  $x + (200 - x) + 4(200 - x) = 760$ ;

2)  $(200 - x) + x + 4x = 760$ .

На практике мы убедились, что составление таких простейших разновидностей задач вполне доступно уже шестиклассникам; такая работа является хорошей подготовкой к составлению и решению задач в VII—VIII классах.

Цель научить ученика различным формам выражения одного и того же условия должна быть в поле внимания учителя на всех этапах работы при решении задач.

После упражнений в применении взаимосвязанных способов сравнения величин ученикам легче решать более сложные задачи.

Рассмотрим одну из таких задач.

По плану в цехе завода нужно изготовить за 26 рабочих дней определенное количество деталей. Улучшив технику производства, в цехе стали изготавливать ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану, а поэтому за 24 дня работы рабочие цеха выполнили плановое задание и изготовили 200 деталей сверх плана. Сколько деталей изготовили в цехе за 24 рабочих дня?

На экзаменационной работе в VII классе ученики выполнили решение этой задачи в следующих вариантах:

I. В цехе должны были по плану выпускать в день  $x$  деталей; решение сводится к уравнению  $24(x + 50) - 26x = 200$ .

II. В цехе изготавливали ежедневно  $p$  деталей; решение сводится к уравнению  $24p - 26(p - 50) = 200$ .



III. В цехе изготовили всего  $y$  деталей; соответствующее уравнение:

$$\frac{y}{24} - \frac{y - 200}{26} = 50.$$

IV. Рабочие цеха должны были изготовить  $k$  деталей; уравнение следующее:

$$\frac{k + 200}{24} - \frac{k}{26} = 50.$$

При обучении все еще мало уделяют внимания анализу решения, сравнению различных решений.

Учащийся нередко хорошо представляет лишь свой способ решения и не знает других возможных.

Поэтому необходимо предлагать им по возможности решать одну и ту же задачу несколькими способами.

После самостоятельной работы на решение задач следует выписать на доске все возможные уравнения, полученные разными учениками.

Например, в случае рассматриваемой задачи можно потребовать:

Решить задачу, обозначив через  $y$  количество деталей, которое намечено планом. Проверить ответ, решив задачу вторым способом, обозначив через  $k$  количество деталей, фактически выпущенных в цехе.

Процесс решения сводится к составлению уравнения

$$\frac{y + 200}{24} - \frac{y}{26} = 50.$$

Процесс проверки также сводится к составлению уравнения

$$\frac{k}{24} - \frac{k - 200}{26} = 50.$$

На уроке в целях экономии времени удобно предложить половине учеников класса решать задачу одним способом, а другой половине — вторым способом; тогда ученики взаимно контролируют решения друг друга.

Анализируя решение задачи, важно обращать внимание на структуру различных записей уравнения при одном и том же способе решения.

Пусть для решения той же задачи составлено уравнение

$$\frac{y}{24} - \frac{y - 200}{26} = 50. \quad (I)$$

(Здесь основное неизвестное — количество выпущенных деталей.)

Выясняется вопрос: какова соответствующая зависимость величин, выражаемая данным уравнением? Каков смысл этого



уравнения? Рассматриваются другие способы записи этой же зависимости:

$$\frac{y}{24} - 50 = \frac{y - 200}{26}; \quad (\text{II})$$

$$\frac{y - 200}{26} + 50 = \frac{y}{24}. \quad (\text{III})$$

При решении этой задачи обязательно обратить внимание учащихся на существование трех форм выражения зависимостей между данными величинами (указанные три уравнения выражают одно суждение: в день изготавливали на 50 деталей больше нормы).

Не обязательно, конечно, чтобы все три уравнения были составлены каждым учеником (хотя и это целесообразно); достаточно сравнить решения разных учеников и выяснить сходство и отличие составленных ими уравнений и соответствующих способов решения.

Некоторые учителя при алгебраическом решении задач считают необходимым обозначить буквой меньшую из двух сравниваемых неизвестных величин<sup>1</sup>.

Если всегда следовать этому совету, то ученики научатся оперировать прямым действием — сложением, намеренно избегая обратного действия — вычитания; говоря иначе, из двух равноценных способов решения они будут хорошо знать и применять лишь один.

Такое ограничение может иметь далеко идущие нежелательные последствия, а именно ученики будут упражняться лишь в одностороннем исследовании явлений и не будут рассматривать их с разных точек зрения.

Сравнение способов решения осуществляется естественнее всего на одной задаче, т. е. при условиях, когда изменяется один существенный признак рассматриваемого понятия, а именно способ решения (при неизменности сюжета и числовых данных задачи).

Если же не проводить сравнения, то обобщение приемов решения задач, систематизация задач, уяснение их существенных признаков предоставляется стихии.

При решении разных задач (даже задач одного и того же типа, но с различными сюжетами и числовыми данными) основное внимание обычно обращено на получение ответа (и принято добавлять: наиболее кратким путем).

Однако учитель будет поступать правильно, если некоторые задачи будет решать вместе с учениками и длинным, и кратким спосо-

<sup>1</sup> См.: К. П. С и к о р с к и й. О составлении уравнений по условиям задач. «Математика в школе», 1954, № 1, стр. 42; И. Г. П о л ь с к и й. Составление уравнений по условиям задач. Сб. «Решение задач в средней школе», М., Изд.-во АПН РСФСР, 1952, стр. 119.



бами, с тем чтобы сравнить их и выяснить, почему второй способ оказался короче, проще первого.

Рассмотренное выше решение сводится к составлению уравнения, имеющего три члена (например, в последнем случае эти члены суть  $\frac{y-200}{24}$ , 50,  $\frac{y}{24}$ ).

Сравним два способа решения задачи, которой соответствует уравнение, содержащее больше чисел.

В школьном зале поставлены скамейки. Если на каждую скамью посадить по 6 учеников, то не хватит 4 скамеек; если же на каждую скамью посадить по 7 учеников, то 6 скамеек останутся свободными. Сколько скамеек было поставлено в зале?

Первое решение. В зале было  $x$  скамеек. В первом случае на них разместилось бы  $6x$  учеников, но тогда не хватило бы 4 скамеек, т. е.  $6 \cdot 4 = 24$  ученика останутся без места; всего было  $(6x + 24)$  ученика.

Во втором случае занято  $x - 6$  скамеек, т. е. всего учеников было  $7(x - 6)$  человек. Так как и в первом и во втором случае число учеников осталось постоянным, то оба выражения можно соединить знаком равенства и получить уравнение  $6x + 24 = 7(x - 6)$ , из которого найдем:  $x = 66$ .

О т в е т. В зале было поставлено 66 скамеек.

Для проверки решения можно предложить решить ту же задачу при другом неизвестном.

Пусть было всего  $y$  учеников.

Тогда в первом случае требовалось бы  $\frac{y}{6}$  скамеек, фактически же было бы в зале  $\left(\frac{y}{6} - 4\right)$  скамеек. Во втором случае требовалось  $\frac{y}{7}$  скамеек, да еще свободными оставались 6 скамеек, т. е. в зале было  $\left(\frac{y}{7} + 6\right)$  скамеек.

Составляем уравнение

$$\frac{y}{6} - 4 = \frac{y}{7} + 6; y = 420.$$

О т в е т. В зале было поставлено 66 скамеек.

Табличная форма записи решения задачи.

Математическое содержание большинства задач, решаемых в школе, таково, что в них дважды сравниваются («связываются») числовые значения нескольких величин.

Во многих случаях поэтому как при решении этих задач, так и при проверке их удобно пользоваться табличной формой записи, которая короче и нагляднее обычной записи с объяснением: зрительное восприятие определенного расположения чисел в таблице дает дополнительную информацию, облегчающую процесс решения.



Рассмотрим задачу:

Ателье заплатило за шелк на 200 руб. больше, чем за сукно. 1 м шелка стоил 6 руб., 1 м сукна — 10 руб. Сколько метров шелка и сукна в отдельности купило ателье, если всего куплено 76 м?

Схема решения этой задачи:

Материал	Цена в рублях	Количество в м	Стоимость в рублях
Шелк	6	$\frac{x}{6}$	$x$
Сукно	10	$\frac{x - 200}{10}$	$x - 200$

$$\text{Уравнение } \frac{x}{6} + \frac{x - 200}{10} = 76; \quad x = 360.$$

О т в е т. 60 м, 16 м.

Для проверки решения воспользуемся той же схемой, причем находим последовательно сначала стоимость отдельно шелка и сукна, затем количество купленной материи и, наконец, сколько всего куплено материи.

Материал	Цена в рублях	Количество в м	Стоимость в рублях
Шелк	6	$\frac{360}{6} = 60$	360
Сукно	10	$\frac{360 - 200}{10} = 16$	$360 - 200$

Всего нужно  $60 + 16 = 76$  (м) материи.

Разумеется, можно обойтись устной проверкой, пользуясь схемой решения как ориентиром рассуждений и вычислений, выполняемых при проверке. Однако табличная форма записи облегчает сравнение решения и процесса проверки ответа.

## 2. О СОСТАВЛЕНИИ ЗАДАЧ ПО ЗАДАННОМУ УРАВНЕНИЮ

В учебной литературе находит место оправдавший себя на практике принцип параллельного рассмотрения некоторых вопросов. Так, например, решение уравнений сопровождается решением задач, приводящих к аналогичным уравнениям; решение уравнений с числовыми коэффициентами сочетается с решением несложных параметрических уравнений.

Однако не  
ю одних то  
разне такой ра  
довлеть над с  
ическим метод  
Повышении  
придумывани  
системам ур  
Пусть дан  
Предъяви  
решение кото  
Вот задач  
дективно:  
Стоимост  
дашей и 6 ко  
Решить с

Соответст  
В семье де  
дый из них,  
сестры купи  
вместе купи

В задаче  
тавления ур  
функционал  
щать и пере

Принцип  
для уяснен  
задачей и е  
оправдано  
упражнения  
нием состав  
деленным т

1) Напр  
алгебре ч.

В одном  
первого эле

ли 350 т з  
Сколько то

Р е ш е

Эту зад

2) Сост

+ 250. (3

уравнения



Однако нередко целую серию уроков алгебры посвящают решению одних только уравнений, не связывая их с задачами. Однообразие такой работы убивает живую мысль ученика, форма начинает довлеть над содержанием, и ценные навыки решения задач алгебраическим методом начинают тускнеть и забываться.

Повышению интереса учащихся к учебе содействует устное придумывание ими сюжетов и ситуаций к заданным уравнениям или системам уравнений.

Пусть дано задание: решить уравнение  $8x - 3 = 5x + 6$ .

Предъявим дополнительное требование — составить задачу, решение которой приводится к решению этого уравнения.

Вот задача, составленная по этому уравнению учениками коллективно:

*Стоимость 8 карандашей без 3 коп. равна стоимости 5 карандашей и 6 коп. сверх того. Сколько было карандашей?*

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 2x + y = 10. \end{cases}$$

Соответствующая задача:

*В семье две сестры и один брат. По сколько тетрадей купил каждый из них, если сестры купили тетрадей поровну и притом две сестры купили всего тетрадей на 2 штуки больше, чем брат, а трое вместе купили 10 тетрадей?*

В задачнике П. А. Ларичева задачи для решения с помощью составления уравнений часто предлагаются парами на одну и ту же функциональную зависимость. Этот прием облегчает ученикам обобщать и переносить метод решения одной задачи на другую.

Принцип дублирования целесообразно использовать также и для уяснения учениками связей, существующих между текстовой задачей и ее уравнением. Поэтому было бы удобно и методически оправдано располагать в задачнике под одним общим номером два упражнения, первое из которых было бы задачей, а второе — заданием составить и решить сходную задачу, удовлетворяющую определенным требованиям.

1) Например, задача № 758 П. А. Ларичев (Задачник по алгебре ч. I. М., Учпедгиз, 1964):

*В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а во второй элеватор привезли 350 т зерна, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе?*

Решение.  $2x - 750 = x + 350$ .

Эту задачу можно было бы дублировать заданием:

2) Составить задачу, решаемую уравнением  $3x - 100 = x + 250$ . (Здесь изменены лишь числа при сохранении структуры уравнения.)



Ученик составляет задачу при сохранении того же сюжета, но с иными числами, например такую:

*В одном элеваторе зерна было в 3 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 100 т зерна, а во второй привезли 250 т зерна, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе?*

Могут быть и иные варианты задания, скажем следующие:

3) Составить задачу с другим сюжетом (не про элеваторы) так, чтобы она решалась посредством уравнения  $3x - 400 = x - 50$ .

Ответ проверь по условию задачи.

(Здесь изменяется уже содержание задачи: если в задаче № 758 в одной части уравнения была разность, а в другой — сумма, то в задаче 3) в обеих частях соответствующего уравнения использованы разности.)

Ученик может составить следующую задачу:

*В одной бригаде площадь земли, занятая пшеницей, в 3 раза больше, чем в другой. Когда в первой бригаде убрали урожай с 400 га, а во второй бригаде — с 50 га, то в обеих бригадах осталось неубранной одинаковая площадь посева. Сколько пшеницы надо было убрать в каждой бригаде?*

Наконец, возможен и четвертый вариант задания, когда в обеих частях уравнения используется действие сложения:

4) Составь задачу с другим сюжетом так, чтобы она решалась при помощи уравнения  $2x + 300 = 4x + 100$  или уравнения  $300 + 6x = 180 + 8x$ .

К последнему уравнению может быть составлена следующая задача:

*Один рабочий изготовил 300 деталей, а другой — 180. Когда первый выполнил еще 6 норм, а второй — 8 таких же норм, то оба изготовили равное число деталей. Сколько деталей нужно изготовить по норме?*

### 3. СОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ ПО АНАЛОГИИ С РЕШЕННОЙ

Решение уравнений и задач, приводящих к ним, пропедевтически рассматривается уже при изучении первых разделов алгебры.

Даже на первом этапе полезно сочетать решение задач с составлением их.

Приведем несколько примеров.

*Сложение и вычитание одночленов.*

Пусть решена задача:

*Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Величины углов относятся как 3, 4 и 5. Найти углы треугольника.*

**Решение.**

$$3x + 4x + 5x = 180^\circ.$$



После решения этой задачи учитель предлагает составить аналогичную задачу, скажем, о сумме углов четырехугольника.

Ученик составляет примерно следующую задачу:

*Сумма углов четырехугольника равна  $360^\circ$ . Величины углов относятся как 3, 4, 5 и 6. Найти углы четырехугольника.*

**Решение.**

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360^\circ.$$

**Ответ.**  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $120^\circ$ .

Следует иметь в виду, что при составлении задач по аналогии иногда может случиться, что формально вычисленный ответ не будет иметь реального смысла.

Поэтому учащиеся должны проверять ответы, найденные при решении составленных ими задач.

Так, например, если при составлении предыдущей задачи было намечено, чтобы углы четырехугольника относились как 3, 4, 5, 12, то последний угол окажется равным  $180^\circ$ , чего быть не может, ибо четырехугольника с углом, равным  $180^\circ$ , не существует.

*Сложение и вычитание многочленов.*

Пусть решена задача:

*В трех школах 1300 учеников. Во второй школе вдвое больше учеников, чем в первой, а в третьей на 100 меньше, чем во второй. Сколько учеников в каждой школе?*

**Решение.**

$$x + 2x + (2x - 100) = 1300.$$

Далее учитель предлагает составить аналогичную задачу, скажем, про жителей трех деревень.

Следует пояснить, что составление задачи с произвольными уравнениями не всегда приводит к цели.

Так, например, задача, сводящаяся к уравнению

$$x + 3x + (3x - 100) = 1200,$$

не имеет решения  $\left(x = 185 \frac{5}{7}\right)$ , если по смыслу условия задачи  $x$  должен быть целым числом (например, количество рабочих или учеников, количество парт и т. п.).

Поэтому надо показать иную, более целесообразную последовательность логических операций при составлении задачи, когда этот процесс начинается с заранее намечаемого *числового тождества*.

Нам надо составить задачу, сводящуюся к уравнению вида

$$x + 2x + (2x - 100) = 1300.$$

Пусть  $x = 400$ .

Напишем новое числовое тождество, помня, что в уравнении речь пойдет о числе учащихся в школах:

$$400 + 3 \cdot 400 + (3 \cdot 400 - 300) = 2500.$$



Данное числовое тождество заменим уравнением

$$y + 3y + (3y - 300) = 2500.$$

И наконец, придумаем к этому уравнению соответствующее условие задачи, например:

*В поселке имеются три школы. Во второй школе учеников в 3 раза больше, чем в первой, а в третьей школе на 300 учеников меньше, чем во второй. В трех школах всего учится 2500 учеников. Сколько учеников в каждой школе?*

Ответ. 400, 1200, 900.

*Формулы сокращенного умножения.*

Пусть решена задача:

*Каждую сторону квадрата увеличили на 2 м, отчего площадь квадрата увеличилась на 56 кв. м. Чему была равна сторона квадрата вначале?*

Решение.

$$(x + 2)^2 - x^2 = 56; \quad x^2 + 4x + 4 - x^2 = 56; \\ 4x = 52; \quad x = 13.$$

Учитель может предложить учащимся составить подобную, но видоизмененную задачу, указав, что в решенной задаче использовано *увеличение* площади квадрата, а надо составить задачу, в которой должно быть использовано *уменьшение* площади в зависимости от *уменьшения* стороны квадрата.

Такое задание ученик выполняет в три приема:

1. Намечает сторону квадрата (пусть  $y = 30$  м) и допускает, что сторону следует уменьшить на 7 м.

Составляет тождество  $30^2 - (30 - 7)^2 = 371$ .

2. Преобразует его в уравнение  $y^2 - (y - 7)^2 = 371$ .

3. Устно формулирует условие задачи:

*Каждую сторону квадрата уменьшили на 7 м, отчего площадь квадрата уменьшилась на 371 кв. м. Какова была сторона квадрата вначале?*

*Алгебраические дроби.*

Пусть решена задача:

*Два велосипедиста выехали одновременно из пункта А в пункт В. Первый проезжает в час 15 км, второй — 12 км и поэтому первый приехал в пункт В на 1,5 часа раньше второго. Найти расстояние от А до В.*

Решение.

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 1,5; \quad x = 90.$$



Составляя аналогичную задачу, учащимся удобнее идти тем же путем в три этапа:

1. Выбрать знаменателями дробей, скажем, числа 10 и 12. Выбрать число, кратное 10 и 12, например 180.

Составить числовое тождество  $\frac{180}{10} - \frac{180}{12} = 3$ .

2. Заменить в тождестве число 180 буквой  $x$ , преобразовав тождество в уравнение:  $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = 3$ .

3. Придумать соответствующее условие, например:

*По плану бригада должна обрабатывать в день 10 га посевов. Фактически она обрабатывала в день 12 га и поэтому выполнила плановое задание на 3 дня раньше срока. Определить площадь посевов.*

После изучения квадратных уравнений весьма интересно выполнять сдвоенные задания по «превращению» одного и того же числового тождества в уравнения, приводящиеся к линейному в одном случае, к квадратному — в другом случае.

Пусть мы составили следующее числовое тождество:

$$\frac{360}{60} + \frac{240}{80} = 9.$$

Напишем условие задачи:

*Купили на 3 руб. 60 коп. яблок по 60 коп. за килограмм и на 2 руб. 40 коп. груш по 80 коп. за килограмм. Всего куплено 6 + 3 = 9 (кг) фруктов.*

Сравним теперь числители разностным сравнением:

$$360 - 240 = 120;$$

$$360 = 240 + 120;$$

$$x = 240;$$

$$360 = x + 120.$$

Приходим к следующему уравнению:

$$\frac{x + 120}{60} + \frac{x}{80} = 9.$$

Соответствующая задача такова:

*Купили 9 кг яблок и груш. 1 кг яблок стоит 60 коп., 1 кг груш — 80 коп. Известно, что за яблоки уплачено на 1 руб. 20 коп. больше, чем за груши. Сколько уплатили за яблоки и груши в отдельности?*

Решение данной задачи приводит к линейному уравнению.

Если же оставим числители известными числами, связав знаменатели разностным сравнением, то получим:

$$60 + 20 = 80;$$

$$60 = 80 - 20;$$

$$y = 80;$$

$$60 = y - 20.$$



Получаем следующее уравнение:

$$\frac{360}{y-20} + \frac{240}{y} = 9.$$

Учащиеся формулируют условие новой задачи:

*Купили 9 кг яблок и груш. За яблоки уплачено 3 руб. 60 коп. и за груши 2 руб. 40 коп. Найти цены килограмма яблок и килограмма груш, если килограмм яблок дешевле килограмма груш на 20 коп.*

Решение данной задачи выполняется посредством составления квадратного уравнения.

Можно, конечно, связать числители (или знаменатели) посредством использования сумм этих чисел.

Тогда получаем:

$$360 + 240 = 600;$$

$$360 = k;$$

$$k + 240 = 600;$$

$$240 = 600 - k;$$

и, наконец,

$$\frac{x}{60} + \frac{600-x}{80} = 9.$$

Дальше составляется условие задачи к составленному уравнению:

*Купили 9 кг яблок и груш, всего на 6 руб. и т. д.*

$$60 + 80 = 140;$$

$$60 = p;$$

$$p + 80 = 140;$$

$$80 = 140 - p;$$

$$\frac{360}{p} + \frac{240}{140-p} = 9.$$

Дальше составляется условие задачи к составленному уравнению:

*Купили 9 кг яблок и груш, причем 1 кг яблок и 1 кг груш стоят вместе 1 руб. 40 коп. и т. д.*

Приведем пример еще одной задачи, которая также решается с помощью уравнения с дробными членами.

Пусть решена задача:

*Сумма окружностей переднего и заднего колес экипажа равна 5 м. Одно из них на протяжении 90 м делает столько же оборотов, сколько другое на протяжении 60 м. Найти окружность каждого колеса.*

Решение:

$$\frac{90}{x} = \frac{60}{5-x}; x = 3.$$

Ответ. 3 м и 2 м.

Составление аналогичной задачи ученик выполняет следующим образом:

1. Выбирает ситуацию.

Пусть, например, задача будет составлена на сравнение количеств купленной материи.

Подбирает цену шелковой и цену шерстяной материи возможно ближе к истинным: 1 м шелковой ткани стоит 8 руб., 1 м шерстяной материи стоит 12 руб.



Пусть для мастерской куплено по 100 м материи того и другого сорта и заплачено  $8 \cdot 100 = 800$  руб.;  $12 \cdot 100 = 1200$  руб.

Составляет далее равенство из двух дробей (т. е. приравнивает количества купленной материи):  $\frac{800}{8} = \frac{1200}{12}$ .

2. Заменяет числовое тождество уравнением, причем здесь возможны различные варианты замены.

а) Следуя решенной задаче, можно за неизвестное  $x$  принять 8 ( $x = 8$ ), тогда  $12 - 20 - 8 = 20 - x$ .

Получается уравнение  $\frac{800}{x} = \frac{1200}{20-x}$ .

б) Приняв за  $y$  цену шерстяной материи  $y = 12$ , получим иное уравнение

$$\frac{800}{20-y} = \frac{1200}{y}.$$

В обоих случаях задача имеет одно условие:

1 м шерстяной и 1 м шелковой материи стоят вместе 20 руб. Зная, что на 800 руб. можно купить столько же метров шелковой материи, сколько можно купить шерстяной материи на 1200 руб., определить цену шерстяной и шелковой материи.

#### 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ, РЕШЕННОЙ ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Покажем, как можно преобразовать задачу на составление системы уравнений в другую задачу, исходя из анализа конструкции решенной задачи:

На платформу были погружены дубовые и сосновые шпалы, всего 300 шпал. Известно, что все дубовые шпалы весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определить, сколько было дубовых и сосновых шпал отдельно, если каждая дубовая шпала весила 46 кг, а каждая сосновая — 28 кг.

Решение. Было  $x$  дубовых,  $y$  сосновых шпал. Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 28x - 46y = 1000. \end{cases}$$

О т в е т. 100 дубовых; 200 сосновых шпал.

Проверку решения запишем кратко в виде двух равенств:

$$\begin{aligned} 200 + 100 &= 300; \\ 28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 &= 1000. \end{aligned}$$

Какие же иные варианты задач можно составить по этому сюжету? Сколько всего этих вариантов? Анализируем структуру задачи по форме уравнений, составленных по ее условию. В первой строке взята сумма всех шпал, а во второй строке взята разность весов шпал двух сортов. Какими способами можно изменить условие задачи, не изменяя сюжета и данных чисел?



Учащиеся выясняют, что можно, например, вместо суммы всех шпал взять разность числа сосновых и дубовых шпал, а вместо разности весов взять сумму весов.

Так как для изменения условия задачи достаточно одной вариации, то можно получить четыре разновидности задачи, структуры которых будут следующие:

сумма количеств шпал: $200 + 100 = 300$ ;	}	I
разность значений веса: $28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 = 1000$ ;		
сумма количеств шпал: $200 + 100 = 300$ ;	}	II
сумма значений веса: $28 \cdot 200 + 46 \cdot 100 = 10\,200$ ;		
разность количеств шпал: $200 - 100 = 100$ ;	}	III
разность значений веса: $28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 = 1000$ ;		
разность количеств шпал: $200 - 100 = 100$ ;	}	IV
сумма значений веса: $28 \cdot 200 + 46 \cdot 100 = 10\,200$ .		

Например, задача (IV) будет иметь следующее условие:

На платформу было погружено дубовых шпал на 100 штук меньше, чем сосновых. Известно, что все шпалы весили 10,2 т. Определить, сколько было дубовых и сосновых шпал в отдельности, если каждая дубовая шпала весила 46 кг, а каждая сосновая — 28 кг.

Система уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 100, \\ 28y + 46x = 10\,200. \end{cases}$$

Все четыре задачи имеют общую структуру: в них известны вес одной дубовой шпалы и вес одной сосновой шпалы, искомым является количество шпал каждого сорта в отдельности.

Другая группа из четырех задач возникает тогда, когда вместо двух неизвестных количеств шпал будут искомыми вес дубовой шпалы и вес сосновой шпалы.

Если в условии задачи (I) была дана сумма количеств шпал, то по аналогии в условии задач (I и II), укажем, сколько весили вместе одна дубовая и одна сосновая шпалы, а в условии задач (III и IV) укажем, на сколько дубовая шпала тяжелее сосновой.

Например, задача (II) будет выглядеть так:

На платформу было погружено 100 дубовых и 200 сосновых шпал, причем общий вес шпал составлял 10,2 т.

Одна сосновая шпала и одна дубовая шпала весят вместе 74 кг. Определить, сколько весила одна дубовая и одна сосновая шпала в отдельности.

Решение.  $a + b = 74$ ;  $200a + 100b = 10\,200$ .

## 5. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Одним из неразработанных вопросов методики математики до сих пор продолжает оставаться классификация алгебраических задач, хотя ею занимались многие методисты.

Н. Альтшу  
свой групп («  
1. Задачи  
до компо  
2. Проц  
3. Задач  
4. Движ  
5. Измен  
6. Обрат  
7. Числа  
8. Смеш  
Такое те  
о располож  
вые по степ  
личные по  
Наиболее  
сификация,  
Он разб  
ческого цик  
мых посред  
Он рас  
ным разде  
читание од  
членов и  
новой гр  
шение зад

- 1)  $x +$
- 2)  $ax -$
- 3)  $ax -$
- 4)  $ax -$
- 5)  $ax -$
- 6)  $\frac{1}{a}$
- 7)  $\frac{a}{x}$

Эта к  
ленной  
В кла  
ности за  
След  
считать  
содержа  
Одна  
следую



И. Альтшуллер предлагал разбивать задачи на следующие восемь групп («Математика в школе», 1940, № 2):

1. Задачи без конкретного содержания (нахождение неизвестного компонента, двух чисел по их сумме и разности и т. п.).
2. Проценты.
3. Задачи на сложение.
4. Движение.
5. Изменение членов дроби (отношения).
6. Обратные величины (например, задачи на бассейны).
7. Числа и цифры.
8. Смешанный отдел.

Такое тематическое распределение задач не решает вопроса о расположении их в порядке возрастающей трудности: одинаковые по степени трудности задачи попадают в разные группы и различные по трудности задачи попадают в одну группу.

Наиболее обоснованной и полно разработанной является классификация, предложенная А. Н. Барсуковым.

Он разбил задачи на две большие группы: задачи пропедевтического цикла и задачи основного цикла (речь идет о задачах, решаемых посредством уравнений первой степени).

Он распределяет задачи первой группы соответственно различным разделам тождественных преобразований: на сложение и вычитание одночленов и многочленов, на умножение и деление одночленов и многочленов, на алгебраические дроби и т. д. Задачи основной группы делит по виду уравнения, к которому сводится решение задачи. Уравнения эти следующие:

$$1) x + a = b; ax = b; \frac{x}{a} = b; \frac{a}{x} = b;$$

$$2) ax + b = cx + d;$$

$$3) ax + b = m(cx + d) \text{ и } ax + b = m(cx + d) + r;$$

$$4) ax + b = m[c(s - x) + d];$$

$$5) ax + b(s - x) = c;$$

$$6) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b};$$

$$7) \frac{a}{x} = \frac{b}{c - x}.$$

Эта классификация помогает учителю подбирать задачи в определенной последовательности.

В классификации А. Н. Барсукова достигнуто возрастание трудности задач от первой группы к последней.

Следует подчеркнуть правильную идею этой классификации — считать основой классификации уравнение, т. е. функциональное содержание задачи.

Однако классификация, предложенная А. Н. Барсуковым, имеет следующие недостатки:



1) в основу ее положена аналитическая сторона работы над задачами — составление уравнения;

2) в силу этой односторонности данная классификация не охватывает многих разновидностей задач;

3) неясны пути перехода от одного вида задач к другому. (Иначе говоря, не дан ответ на вопрос: чем отличается одно уравнение от другого?)

Более удачна классификация задач на основе способа сравнения величин.

Понятие «способ сравнения величин» является первичным по отношению к понятию «уравнение», которое является производным от первого понятия.

Задачи, решаемые с помощью линейных и квадратных уравнений, можно разделить на две группы:

А) задачи, в которых используются разные значения одной и той же величины (например, значения веса или значения расстояния);

Б) задачи, в которых используются тройки взаимосвязанных различных величин (например, в задаче используется связь между ценой, количеством товара и стоимостью).

#### А. Задачи, в которых используются значения одной и той же величины

Покажем преимущество предлагаемого подхода на примере составления задач, исходя из какой-либо простой ситуации (для краткости используем лишь один сюжет и один набор числовых значений; при обучении варьируются, конечно, и сюжеты задач, и математическое содержание их).

1. В одном мешке было 50 кг муки, а в другом — 75 кг муки. Из первого мешка взяли 20 кг, из второго — 15 кг. Осталось в них соответственно  $50 - 20 = 30$  и  $75 - 15 = 60$  (кг) муки.

Запишем эти зависимости в следующей таблице:

	Первоначальное количество в кг	Изменение в кг	Оставшееся количество в кг
Первый мешок	50	— 20	30
Второй мешок	75	— 15	60

Выясняем наличие трех значений, которые сокращенно обозначим так:

первоначальное количество (1);

изменение количества (2);

оставшееся количество (3).

Для составления задачи на уравнение первой степени надо сравнить каким-либо способом два значения из указанных трех.



Таких комбинаций насчитывается всего три, которые обозначим так:

*Первая подгруппа.* Сравнивают первоначальное количество и оставшееся количество (1, 3).

В условии этих задач используются числа среднего столбца, поэтому при кратком обозначении задач будем писать букву «б» («без видоизменения») в середине:  $\square \text{ б } \square$  (см. об этом дальше).

*Вторая подгруппа.* Сравнивают первоначальное количество и изменение (1, 2). В этом случае в условии задачи включаются числа третьего столбца, поэтому задачи данного вида кратко обозначаем так:  $\square \square \text{ б}$ .

*Третья подгруппа.* Сравнивают оставшееся количество и изменение (2, 3). Задачи этого вида можно «зашифровать» так:  $\text{б } \square \square$ .

Но два значения величины можно связать одним из следующих четырех приемов:

- (Р) — разностное сравнение  
(больше на ...; меньше на ...);
- (К) — кратное сравнение  
(больше, меньше в... раз);
- (П) — процентное отношение  
(составляет... %);
- (Ч) — часть от числа.

Кроме того, специфическая особенность этих задач, заключающаяся в том, что все величины, используемые в задаче, однородны, позволяет использовать для увеличения числа вариаций задач новый способ выражения неизвестных — суммирование величин в каждой из трех подгрупп.

Итак, имеем пятый способ выражения связи между величинами:

(С) — суммирование двух значений величины.

Сравнение с помощью процентного отношения и с помощью понятия «часть от числа» является частным случаем кратного сравнения.

Следовательно, существенно различных оказывается всего три способа связи однородных величин: посредством вычитания (Р), посредством деления (К, П, Ч), посредством сложения (С).

Целесообразно различать все пять способов связывания величин. Суммирование значений двух величин есть лишь эквивалент сравнения, но не сравнение величин в собственном смысле слова. Поэтому более правильным было бы употреблять термин «способы связывания величин».

Способ сравнения будет тогда частным случаем способа связывания величин.

Однако в курсе арифметики для классификации задач можно обойтись лишь сравнением величин.



Если указанные три способа связывания величин сочетать по два, то получим девять разновидностей задач внутри каждой подгруппы. Если же учитывать пять способов связывания величин, то число разновидностей задач дойдет до 25.

Уяснение этой схемы связей однородных величин облегчает работу по составлению задач.

Пусть мы решили сравнить первоначальные количества кратным сравнением и оставшиеся количества разностным сравнением, для этого находим:

$$75 : 50 = 1 \frac{1}{2} \text{ (раза); } 60 - 30 = 30 \text{ (кг).}$$

В условии составляемой задачи должны быть использованы вместо четырех значений величин соответствующие два результата их сравнения (в данном случае вместо чисел 75 кг, 50 кг, 60 кг, 30 кг берем два выражения: в  $1 \frac{1}{2}$  раза, на 30 кг).

Кроме того, в условии задачи должны быть использованы оба значения величины, не включенной в сравнение (20 кг, 15 кг).

Итак, можем составить следующую задачу:

*В первом мешке было муки в  $1 \frac{1}{2}$  раза меньше, чем во втором.*

*Когда из первого мешка взяли 20 кг, а из второго — 15 кг, то во втором оказалось муки на 30 кг больше, чем в первом. Сколько муки было первоначально в каждом мешке?*

$$\text{Уравнение } (x - 20) + 30 = \left(1 \frac{1}{2} x - 15\right).$$

Составленную задачу обозначим символически так: «КБР», что означает: значения первоначального количества связаны кратным сравнением (буква «К» стоит на первом месте); числа второго столбца остались без изменения (буква «б» стоит на втором месте); значения оставшегося количества связаны разностным сравнением (буква «Р» стоит на третьем месте).

Сравнивая первоначальные количества разностным сравнением, оставшиеся количества — кратным, имеем:

$$75 - 50 = 25 \text{ (кг); } 60 : 30 = 2 \text{ (раза).}$$

Соответствующая задача вида «РБК»:

*В первом мешке было муки на 25 кг меньше, чем во втором. Когда из первого мешка взяли 20 кг, а из второго — 15 кг, то во втором оказалось муки в 2 раза больше, чем в первом. Сколько муки было первоначально в каждом мешке?*

$$\text{Уравнение } (y - 20) \cdot 2 = y + 25 - 15.$$

Оставив один элемент задачи неизменным (например, кратное сравнение значений первой величины), мы можем изменять способы связывания значений третьей величины.



Получим следующие виды задач:

КбК, КбП, КбР, КбС, КбЧ.

Аналогично можем обозначить все виды задач первой подгруппы:

РбР	РбК	РбП	РбЧ	РбС
ПбР	ПбК	ПбП	ПбЧ	ПбС
ЧбР	ЧбК	ЧбП	ЧбЧ	ЧбС
СбР	СбК	СбП	СбЧ	СбС

Аналогично можно обозначить задачи двух других подгрупп. Из них составим в качестве примера лишь несколько задач.

Сравним, например, изменения двух количеств (20 и 15) и оставшиеся количества (30 и 60), причем первые два числа сравним, применяя понятие «часть от числа» ( $\frac{15 \text{ кг}}{20 \text{ кг}} = \frac{3}{4}$ ; два значения последней величины сравним посредством разности ( $60 - 30 = 30 \text{ кг}$ ). Получим задачу типа «бКР»:

В одном мешке было 50 кг муки, а в другом — 75 кг муки. Количество муки, отсыпанной из второго мешка, составило  $\frac{3}{4}$  количества муки, отсыпанной из первого мешка. После этого в первом мешке осталось на 30 кг муки меньше, чем во втором. Сколько муки было отсыпано из каждого мешка?

$$\text{Уравнение } (50 - x) + 30 = 75 - \frac{3}{4}x.$$

Данная задача (как и многие из последующих) легче решается с помощью системы двух уравнений, нежели одним уравнением. Поэтому в дальнейшем мы будем приводить и соответствующие уравнения с одним неизвестным, и одну из возможных систем уравнений с двумя неизвестными, посредством которой решается задача.

Так, предыдущая задача сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{3}{4}p, \\ (50 - p) + 30 = 75 - k. \end{cases}$$

В составляемых нами задачах требовалось определить пару значений одной из двух величин. (Оба значения третьей величины используются в условии задачи.)

Однако при сохранении вида задачи искомыми можно сделать два сравниваемых значения второй величины.

Например, в последней задаче «бКР», вместо того чтобы находить ответ на вопрос: «Сколько килограммов муки было отсыпано из каждого мешка?», можно рассматривать вопрос: «Сколько килограммов муки осталось в каждом мешке?»

Решение.

В первом мешке осталось  $x$  кг, во втором мешке  $(x + 30)$  кг муки.



Следовательно, из первого мешка отсыпали  $50 - x$ , а из второго  $75 - x - 30 = (45 - x)$  кг.

Получаем согласно условию уравнение

$$(50 - x) \cdot \frac{3}{4} = (45 - x).$$

Задачу можно решить с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} p = k + 30, \\ (50 - k) \cdot \frac{3}{4} = 75 - p. \end{cases}$$

Составим задачу из второй подгруппы. Для этого, например, сравним изменения кратным сравнением  $\left(\frac{20 \text{ кг}}{15 \text{ кг}} = \frac{4}{3}\right)$ , первоначальные количества—посредством процентного отношения  $\left(\frac{75 \text{ кг}}{50 \text{ кг}} = \frac{3}{2} = 150\%\right)$ .

Соответствующая задача вида «ПБК» выглядит так:

*Количество муки, имевшейся во втором мешке, составляло 150% муки, имевшейся в первом мешке. Когда отсыпали из первого мешка в  $\frac{4}{3}$  раза больше муки, чем из второго, то в первом мешке осталось 30 кг, а во втором — 60 кг. Сколько муки было отсыпано из каждого мешка?*

Решение задачи сводится к составлению и решению уравнения  $(x + 30) \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}x + 60$  или системы уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{4}{3}p, \\ (30 + k) \cdot \frac{3}{2} = 60 + p. \end{cases}$$

Если в последней задаче вопрос был бы иной («Сколько муки было первоначально в каждом мешке?»), то, считая основными неизвестными эти величины, получим следующее уравнение:

$$b - 30 = \left(\frac{3}{2}b - 60\right) \cdot \frac{4}{3}.$$

Второй способ приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{3}{2}p, \\ p - 30 = \frac{4}{3}(k - 60). \end{cases}$$



Выше мы исходили из ситуации, когда оба изменения были отрицательными («отсыпали из обоих мешков»).

Разнообразие задач увеличится, если использовать две другие возможности изменения величин:

- а) Одна величина уменьшается, а другая увеличивается.
- б) Обе величины увеличиваются.

Пусть исходная ситуация, на основе которой будем составлять задачи, выражена в виде таблицы:

	Первоначальное количество в кг	Изменение в кг	Оставшееся количество в кг
Первый мешок	50	+ 10	60
Второй мешок	75	— 45	30

Используя кратное сравнение двух значений первой величины ( $75 : 50 = 1,5$ ) и разностное сравнение двух значений третьей величины ( $60 - 30 = 30$ ), получим задачу вида «КБР»:

В первом ящике было в  $1\frac{1}{2}$  раза меньше яблок, чем во втором.

В первый ящик добавили 10 кг яблок, а из второго отсыпали 45 кг яблок. После этого в первом ящике стало яблок на 30 кг больше, чем во втором. Сколько килограммов яблок было первоначально в каждом ящике?

Уравнение

$$x + 10 = \left(\frac{3}{2}x - 45\right) + 30.$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{3}{2}p, \\ p + 10 = (k - 45) + 30. \end{cases}$$

Составим противоположную по структуре задачу вида «РБК», в которой используется разностное сравнение значений первой величины ( $75 - 50 = 25$  (кг)) и кратное сравнение значений третьей величины ( $60 : 30 = 2$  (раза)).

Получим задачу:

В одном ящике было на 25 кг яблок меньше, чем в другом. Когда в первый ящик добавили 10 кг, а из второго взяли 45 кг, в первом ящике стало яблок в 2 раза больше, чем во втором. Сколько килограммов яблок было первоначально в каждом ящике?

Уравнение

$$x + 10 = 2(x + 25 - 45).$$



Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p - 25, \\ k + 10 = (p - 45) \cdot 2. \end{cases}$$

Пусть далее исходная ситуация, на основе которой будем составлять задачи, выражается схемой:

	Первоначальное количество в т	Изменение в т	Оставшееся коли- чество в т
Первый склад	60	+ 90	150
Второй склад	30	+ 270	300

Используем процентное отношение двух значений первой величины ( $60 : 30 = 2 = 200\%$ ) и разностное сравнение двух значений второй величины ( $270 - 90 = 180$ ).

Получается задача вида «ПРб»:

Количество угля, имевшегося на первом складе, составляет 200% количества угля, имевшегося на втором складе. Когда привезли на первый склад на 180 т меньше, чем на второй, то на первом складе оказалось 150 т, а на втором — 300 т. Узнать, сколько угля привезли на каждый склад.

Уравнение  $150 - x = [300 - (x + 180)] \cdot 2$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p - 180, \\ 150 - k = (300 - p) \cdot 2. \end{cases}$$

Сравнивая первоначальные количества посредством разностного сравнения ( $60 - 30 = 30$  т), а изменения посредством процентного отношения ( $270 : 90 = 3 = 300\%$ ), получим задачу вида «РПб»:

На первом складе было угля на 30 т больше, чем на втором складе. Когда на второй склад привезли столько угля, что он составил 300% от угля, привезенного на первый склад, то на первом оказалось 150 т угля, а на втором оказалось 300 т угля. Сколько тонн угля привезли на каждый склад?

Уравнение  $150 - x = (300 - 3x) + 30$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p + 30, \\ (150 - k) \cdot 3 = 300 - p. \end{cases}$$

Следует отметить, что имеются различные возможности для увеличения числа вариаций, являющихся частными случаями по отношению к рассмотренным выше типам, а именно:

а) Значения двух величин могут быть равными (было в двух мешках поровну; отгрузили поровну, стало поровну и т. п.).



б) Одно из изменений этих значений может быть нулевым, т. е. соответствующее количество не изменяется.

В логическом плане эти оттенки имеют характерные особенности и поэтому они увеличивают число вариантов задач.

Мы рассмотрели исчерпывающим образом классификацию большой совокупности задач, решаемых по теме «Уравнения первой степени».

Структура этих задач состоит из шести чисел, из которых два числа даются в условии, а четыре значения представлены в скрытом виде — результатами попарного сравнения.

Вне данной совокупности задач остаются более простые задачи (задачи пропедевтического цикла), в которых также используются одноименные величины.

Анализ задачника П. А. Ларичева показывает, что в нем нет большинства рассмотренных выше разновидностей задач. Например, в нем почти отсутствуют задачи из второй и третьей подгрупп по нашей квалификации.

Стало быть, в практике обучения мало используется возможная градация возрастания трудности задач и достаточное разнообразие по логическому содержанию задач.

### Б. Задачи, в которых используются значения трех различных взаимосвязанных величин

Аналогично классификации задач, в которых используются значения одной и той же величины, можно выполнить классификацию второй совокупности алгебраических задач, в которых используются тройки различных величин.

Эти величины связаны прямо пропорциональной зависимостью, например: скорость ( $v$ ), время ( $t$ ) и пройденный путь ( $s$ ); цена, количество товара и стоимость; производительность, время и объем работы; норма расхода горючего, время движения транспорта (или расстояние) и количество горючего; объем тела и вес тела; урожайность, площадь посева и валовой сбор; пропускная способность трубы, время и количество перемещенного вещества; грузоподъемность одной машины, количество машин и вес перевезенного груза; удельная теплоемкость, количество вещества и количество теплоты; удельная теплота плавления (парообразования), количество вещества и количество теплоты; теплоемкость, разница температур и количество теплоты; плотность жидкости, глубина погружения и давление; сила тока, время и количество электричества; сила тока, сопротивление участка цепи и падение напряжения на этом участке; напряжение одной батареи, количество таких батарей и общее напряжение при последовательном соединении их; сила, расстояние и работа; мощность, время и работа,



теплотворность, количество топлива и количества теплоты; сила, длина плеча и момент силы<sup>1</sup>.

Эти тройки величин однотипны по математической зависимости между ними.

Для краткости обозначим первые величины (скорость, цена, производительность и т. п.) буквой  $v$ ; вторые величины (время, количество товара и т. п.) — буквой  $t$ ; третьи величины (пройденный путь, стоимость, объем работы и т. п.) — буквой  $s$ .

В предыдущем случае тройки величин были связаны с помощью действий первой ступени  $A \pm B = C$ , а в рассматриваемом случае величины связываются посредством действий второй ступени:

$$1) v \cdot t = s;$$

$$2) \frac{s}{v} = t;$$

$$3) \frac{s}{t} = v.$$

Последние две связи являются следствиями первой. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь одну форму связи:

$$v \cdot t = s.$$

Выберем какую-нибудь простую ситуацию, например следующую:

*Велосипедист ехал 6 часов, проезжая в час по 15 км, всего проехал 90 км. Пешеход шел 8 часов, проходил в час 5 км, всего прошел 40 км.*

Запишем эти соотношения в виде двух равенств:

$$15 \cdot 6 = 90;$$

$$5 \cdot 8 = 40.$$

Для составления задач, решаемых посредством уравнений, необходимо, как это было подробно показано выше, сравнить (связать) два значения из трех (четыре числа из шести).

Аналогично рассмотренному выше необходимо различать следующие три подгруппы задач:

**Первая подгруппа.** Сравнивают первую величину и третью величину (I, III) (например, скорость и путь).

**Вторая подгруппа.** Сравнивают вторую величину и третью величину (II, III) (например, время и путь).

**Третья подгруппа.** Сравнивают первую величину и вторую величину (I, II) (например, скорость и время).

Как будет показано ниже, среди задач последней подгруппы содержатся задачи, решаемые квадратным уравнением; задачи первых двух подгрупп решаются уравнениями первой степени.

<sup>1</sup> Отметим, что в задачниках используется значительно меньше физических величин, чем это можно было сделать. Большинство из приведенных здесь зависимостей по действующим программам курса физики известны ученикам уже в VII классе.



Внутри каждой подгруппы задачи различаются по виду связи между числами, подобно изложенному выше.

Для упрощения изложения рассмотрение видовых понятий «процентное отношение», «кратное сравнение», «часть от числа» заменим одним родовым понятием «кратное сравнение».

Тогда разновидности задач какой-либо подгруппы (например, II, III) можно обозначить так:

БРР	БРК	БРС
БКР	<u>БКК</u>	БКС
БСР	БСК	БСС

Из этих 9 задач сочетанию «БКК» соответствует неопределенная задача, и ее следует исключить из рассмотрения.

Итак, существуют 8 разновидностей задач, в которых используются тройки разнородных величин, решаемых аппаратом линейных уравнений.

Составим несколько задач, пользуясь приведенной классификацией:

1. Два значения второй величины заменим кратным сравнением ( $8 : 6 = \frac{4}{3}$ ) и соответствующие значения третьей величины — разностным сравнением  $90 - 40 = 50$  (км).

Получаем задачу вида «БКР»:

*Велосипедист был в пути в  $\frac{4}{3}$  раза меньше времени, чем пешеход. Скорость велосипедиста 15 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч. Сколько времени был каждый из них в пути, если путь велосипедиста на 50 км больше пути пешехода?*

$$\text{Уравнение } 15 \cdot x - 5 \cdot \frac{4}{3}x = 50.$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{4}{3}p, \\ 15p - 5k = 50. \end{cases}$$

2. Составим задачу вида «БРК», для этого найдем:  $8 - 6 = 2$ ; ( $\frac{90}{40} = 2,25$  раза).

*Велосипедист был в пути на 2 часа меньше пешехода. Скорость велосипедиста 15 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч. Сколько времени был каждый из них в пути, если велосипедист прошел расстояние, в 2,25 раза большее, чем пешеход?*

$$\text{Уравнение } 15 \cdot x = 5 \cdot (x + 2) \cdot 2,25.$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p + 2, \\ 15p = 5 \cdot k \cdot 2,25. \end{cases}$$



3. Составим задачу вида «бКС», для чего найдем  $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ;  
 $90 + 40 = 130$  (км).

Условие задачи следующее:

Велосипедист и пешеход движутся навстречу друг другу. До встречи велосипедист был в пути  $\frac{3}{4}$  того времени, сколько шел до встречи пешеход. Скорость велосипедиста равна 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. Узнать, сколько километров прошел каждый из них, если расстояние между пунктами, из которых они вышли, равно 130 км.

Уравнение  $15 \cdot \frac{3}{4}x + 5x = 130$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{3}{4}, \\ 15k + 5p = 130. \end{cases}$$

4. Для составления задачи «бСК» определяем:  $6 + 8 = 14$  (час.);

$$\frac{90}{40} = 2,25 = 225\%.$$

Получим задачу:

Путешественник ехал сначала на велосипеде, потом шел пешком; всего он был в пути 14 часов, причем на велосипеде он проехал расстояние в  $2\frac{1}{4}$  раза большее, чем прошел пешком. Определить, сколько километров он проехал и сколько прошел пешком, если скорость движения на велосипеде равна 15 км/ч, а скорость пешехода — 5 км/ч.

Уравнение  $15 \cdot x = 5(14 - x) \cdot 2\frac{1}{4}$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k + p = 14, \\ 15k = 5p \cdot 2\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Задачи из второй подгруппы составим, используя зависимость между ценой, количеством товара и стоимостью:

Пусть куплено 12 м шелка по 6 руб. за метр — всего на 72 руб. и 15 м сукна по 10 руб. за метр — всего на 150 руб.

Запишем сокращенно условие в форме двух тождеств:

$$\begin{cases} 6 \cdot 12 = 72, \\ 10 \cdot 15 = 150. \end{cases}$$



5. Составим задачу вида «СБР», для чего находим:  $6 + 10 = 16$  (руб.);  $150 - 72 = 78$  (руб.).

Имеем следующую задачу:

1 м шелка и 1 м сукна стоят вместе 16 руб. За 15 м сукна заплатили на 78 руб. больше, чем за 12 м шелка. Определить цену 1 м шелка и 1 м сукна.

Уравнение  $15x - 12(16 - x) = 78$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k + p = 16, \\ 15k - 12p = 78. \end{cases}$$

Если бы в качестве неизвестных были взяты иные числа (стоимость шелка и сукна в отдельности), то задача решалась бы посредством уравнения (или системы уравнений) с дробными членами.

Уравнение  $\frac{y}{12} + \frac{y+78}{15} = 16$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} a - b = 78, \\ \frac{a}{15} + \frac{b}{12} = 16. \end{cases}$$

6. Составим задачу вида «СБС», для чего находим суммы двух значений первой и третьей величин:  $10 + 6 = 16$  (руб.);  $72 + 150 = 222$  (руб.).

Имеем следующую задачу:

1 м шелка и 1 м сукна стоят вместе 16 руб. За 12 м шелка и 15 м сукна всего заплатили 222 руб. Найти цену 1 м шелка и цену 1 м сукна.

Уравнение  $x \cdot 12 + (16 - x) 15 = 222$ .

Система уравнений:

$$\begin{cases} k + p = 16, \\ 12k + 15p = 222. \end{cases}$$

При другом выборе основных неизвестных получили бы следующее уравнение с дробными членами:

$$\frac{y}{12} + \frac{222-y}{15} = 16.$$

Задачу в этом случае также можно было бы решить с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 222, \\ \frac{a}{12} + \frac{b}{15} = 16. \end{cases}$$



## 6. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ПРОВОДЯЩИХ К КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Если классификация арифметических и алгебраических задач, приводящих к линейным уравнениям, в какой-то мере служила предметом обсуждения методистов, то классификация задач, приводящих к квадратным уравнениям, в литературе почти не затрагивалась.

В большинстве задач на квадратное уравнение используются тройки величин, связанных прямой пропорциональной зависимостью.

Все разновидности задач, решаемых посредством квадратных уравнений, содержатся среди задач третьей подгруппы, в которых связываются значения первой и второй величин (за исключением небольшого количества задач, в которых используются специальные соотношения, например теорема Пифагора).

Выберем какую-либо простую ситуацию:

Колхоз засеял пшеницей 2000 га; средняя урожайность с гектара составила 18 ц; колхоз собрал всего 36 000 ц зерна.

Совхоз засеял пшеницей 1200 га; средняя урожайность составила 24 ц с гектара; общий сбор зерна в совхозе равен 28 800 ц.

Запишем эти соотношения в виде двух тождеств:

$$\begin{aligned} 18 \cdot 2000 &= 36\,000; \\ 24 \cdot 1200 &= 28\,800. \end{aligned}$$

Составим задачу вида «КРб», т. е. используем числа:

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}; \quad 2000 - 1200 = 800 \text{ (га)}.$$

Условие задачи будет следующее:

Площадь, занятая пшеницей в колхозе, была на 800 га больше площади, занятой пшеницей в совхозе. Средняя урожайность пшеницы с гектара в колхозе составляла  $\frac{3}{4}$  средней урожайности в совхозе. Определить среднюю урожайность пшеницы в колхозе и совхозе, если общий сбор пшеницы в колхозе составил 36 000 ц, а в совхозе — 28 800 ц.

Решение<sup>1</sup>.

Пусть  $y$  га — площадь, занятая пшеницей в совхозе.

Уравнение 
$$\frac{36\,000}{y + 800} = \frac{3}{4} \cdot \frac{28\,800}{y}.$$

Мы выяснили, что данная задача решается посредством уравнения первой степени:  $4y \cdot 36\,000 = 3 \cdot 28\,800 \cdot (y + 800).$

<sup>1</sup> В этой и последующих задачах мы ограничиваемся лишь составлением уравнения. Хотя задача составлена исходя из одной совокупности исходных данных, в некоторых случаях, кроме намеченного заранее ответа, получаются вторые ответы (подробнее об этом сказано дальше).



Нетрудно также установить, что все задачи, в символическом обозначении которых встречается кратное сравнение («К»), решаются посредством уравнения первой степени; таковыми будут, кроме рассмотренной задачи «РКб», еще и следующие: «СКб», «КРб», «КСб».

Таким образом, к 16 ранее установленным разновидностям необходимо добавить еще 4. Следовательно, существует всего 20 видов задач, выражающих связь между тремя разнородными величинами, которые решаются с помощью линейных уравнений.

Только четыре вида задач этой группы решаются посредством квадратного уравнения: «РРб», «РСб», «СРб», «ССб».

**Задача «РСб».** Площадь, занятая под пшеницей в колхозе, была на 800 га больше площади, занятой под пшеницей в совхозе. Сумма среднего урожая пшеницы с 1 га в колхозе и с 1 га в совхозе составляет 42 ц. Определить, какова была урожайность пшеницы в совхозе и колхозе в отдельности, если всего в колхозе собрали 36 000 ц, а в совхозе — 28 800 ц.

**Решение.**

1-й способ. Урожайность пшеницы в совхозе составила  $x$  ц.

Уравнение

$$\frac{28\,800}{x} - \frac{36\,000}{42 - x} = 800.$$

2-й способ. Площадь, засеянная пшеницей в совхозе, составляет  $y$  га.

Уравнение

$$\frac{28\,800}{y} + \frac{36\,000}{y + 800} = 42.$$

**Задача «СРб».** Пшеницей в колхозе и совхозе засеяно всего 3200 га. Урожайность в колхозе оказалась ниже урожайности в совхозе на 6 ц с гектара. Узнать, сколько гектаров было занято пшеницей в колхозе и совхозе в отдельности, если общий сбор пшеницы в колхозе составил 36 000 ц, а в совхозе — 28 800 ц.

**Решение.**

1-й способ. В совхозе засеяно пшеницей  $x$  га.

Уравнение

$$\frac{28\,800}{x} - \frac{36\,000}{3200 - x} = 6.$$

2-й способ. В совхозе с 1 га убрали в среднем по  $y$  ц пшеницы.

Уравнение

$$\frac{36\,000}{y} + \frac{28\,800}{y + 6} = 3200$$



Задача вида «ССб». Пшеницей в колхозе и совхозе засеяно всего 3200 га. Сумма среднего урожая пшеницы с 1 га в колхозе и урожая с 1 га в совхозе составляет 42 ц. В колхозе собрали 36 000 ц, а в совхозе — 28 800 ц. Сколько центнеров пшеницы собрали с одного гектара в колхозе и совхозе в отдельности?

Решение.

1-й способ. В колхозе урожайность равна  $x$  ц с 1 га.

Уравнение

$$\frac{36\,000}{x} + \frac{28\,800}{42 - x} = 3200.$$

2-й способ. В колхозе было засеяно пшеницей  $y$  га.

Уравнение

$$\frac{36\,000}{y} + \frac{28\,800}{3200 - y} = 42.$$

Основные подгруппы задач, приводящих к квадратным уравнениям, удобно обозначить следующими терминами: «разность — разность», «разность — сумма», «сумма — разность», «сумма — сумма».

Из этих подгрупп задач вторая и третья подгруппы в сущности не отличаются друг от друга: форма уравнений для задач обоих видов одинакова.

## 7. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОСТАВЛЕНИЯ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХ К КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

а) Составление задач по аналогии.

Мы рассмотрели выше классификацию основных видов задач, приводящих к квадратным уравнениям, в которых используются прямо пропорциональные величины.

Однако в школьных задачниках предлагаются задачи и более простые.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Длина прямоугольника на 10 м больше ширины. Найти длину и ширину прямоугольника, если площадь его равна 119 кв. м.

Решение.  $x(x + 10) = 119$ .

Ученик может составить аналогичную задачу, рассуждая так:

1) Составим числовое тождество:

$$27 \cdot 23 = 621.$$

2) Преобразуем тождество в уравнение, для чего одно из чисел сделаем неизвестным.

Пусть  $27 = y$ , тогда  $23 = 27 - 4 = y - 4$ .

Имеем:  $y(y - 4) = 621$ .  
3) Соответствие  
ловие задачи:  
Основание пар  
лить основание и  
621 м<sup>2</sup>.

II. Пусть ре  
Некоторое да  
дает 567. Найт  
восходит цифру  
Решение.

Пусть искомо  
Имеем уравне  
Откуда имеем  
Составим ана

цифр разность  
1. Пусть иско  
Помножим э

2. Пусть не  
Тогда число дес  
ного сравнения

Получили у  
3. Формули  
Некоторое б

дает 552. Най  
превосходит ц

б) Прео  
к квадрат  
мую лине

Задача мож  
го, какие взаи  
Например,  
дующего тожд

Имеются б  
жности мень  
зная, что бс  
больше, чем

Решив  
4 м и 3 м;

Примеча  
задачу, реш



Имеем:  $y(y - 4) = 621$ .

3) Соответственно составленному уравнению формулируем условие задачи:

Основание параллелограмма на 4 м длиннее его высоты. Определить основание и высоту параллелограмма, если площадь его равна  $621 \text{ м}^2$ .

II. Пусть решена задача:

Некоторое двузначное число, умноженное на сумму его цифр, дает 567. Найти это число, зная, что цифра его десятков на 3 превосходит цифру единиц.

Решение.

Пусть искомое число имеет  $x$  десятков и  $(x - 3)$  единиц.

Имеем уравнение  $(10x + x - 3) \cdot (x + x - 3) = 567$ .

Откуда имеем:  $x = 6$ . Искомое число 63.

Составим аналогичную задачу, но используем вместо суммы цифр разность цифр числа.

1. Пусть искомым числом будет 93.

Помножим это число на разность его цифр:

$$(90 + 3)(9 - 3) = 552.$$

2. Пусть неизвестным будет цифра единиц  $x = 3$ .

Тогда число десятков в 3 раза больше числа единиц (вместо разностного сравнения цифр используем кратное сравнение их).

Получили уравнение  $(30x + x)(3x - x) = 552$ .

3. Формулируем соответствующую задачу:

Некоторое двузначное число, умноженное на разность его цифр, дает 552. Найти это число, зная, что цифра его десятков в 3 раза превосходит цифру единиц.

б) Преобразование задачи, приводящей к квадратному уравнению, в задачу, решаемую линейным уравнением (и обратно).

Задача может иметь различное содержание в зависимости от того, какие взаимосвязанные величины используются в ней.

Например, возьмем задачу, которая составлена, исходя из следующего тождества:

$$\frac{64}{4} - \frac{30}{3} = 6.$$

Имеются два колеса. Окружность большего колеса длиннее окружности меньшего колеса на 1 м. Определить окружности колес, зная, что большее колесо на расстоянии 64 м сделало на 6 оборотов больше, чем меньшее на расстоянии 30 м.

Решив эту задачу, мы найдем два решения:

4 м и 3 м;  $2\frac{2}{3}$  м и  $1\frac{2}{3}$  м.

Примечательно то, что из исходного тождества можно получить задачу, решаемую посредством уравнения первой степени. Для



этого достаточно было бы, оставив знаменатели известными, сравнить числители.

1. Пусть  $64 = y$ , тогда  $30 = y - 34$ .  
Получаем следующее уравнение:

$$\frac{y}{4} - \frac{y - 34}{3} = 6.$$

2. Соответствующая задача будет такова:

Имеются два колеса. Окружность большего колеса равна 4 м, окружность меньшего колеса 3 м. Определить, на каком расстоянии большее колесо сделает на 6 оборотов меньше, чем второе колесо на расстоянии, меньшем расстояния, пройденного первым колесом, на 34 м.

Решив эту задачу, мы найдем один ответ:  $x = 64$  м.

Таким образом, получается следующее соответствие: задаче, решаемой посредством уравнения первой степени (II) и имеющей одно решение ( $x = 64$ ), соответствует задача, решаемая посредством уравнения второй степени, имеющая, вообще говоря, два решения.

Отсюда вывод: при решении задач в разделе «Квадратные уравнения» следует иногда преобразовывать задачу, приводящую к линейному уравнению, в задачу, решаемую посредством квадратного уравнения, и наоборот.

Составление задач, имеющих два решения.

В задачнике П. А. Ларичева среди задач, решаемых с помощью квадратного уравнения (изд. 10, № 430—529), нет задач, имеющих два решения, удовлетворяющих условиям.

Раздел «Система уравнений второй степени» (изд. 10, № 639—667) содержит только две задачи (№ 653, 656), которые имеют по два решения.

Представляет интерес найти способ составления задач, имеющих два решения, удовлетворяющие условию<sup>1</sup>.

Выше была рассмотрена задача, решаемая уравнением

$$\frac{64}{x} - \frac{30}{x-1} = 6. \quad (I)$$

Этой задаче удовлетворяли два решения: 4 м и 3 м;  $2\frac{2}{3}$  м и  $1\frac{2}{3}$  м.

Проанализируем, как решалось это уравнение:

$$64x - 64 - 30x = 6x^2 - 6x; \quad (II)$$

$$6x^2 - 40x + 64 = 0; \quad (III)$$

<sup>1</sup> Примечательно, что в задачниках К. С. Барыбина, П. С. Моденова, К. У. Шахно содержится только по одной задаче с двумя решениями (см.: С. М. Чуканцов. Решение задач, приводящих к квадратным уравнениям в средней общеобразовательной школе с политехническим обучением. «Ученые записки Калужского госпединститута», 1958, вып. V).



$$3x^2 - 20x + 32 = 0; \quad (IV)$$

$$(x - 4)\left(x - \frac{8}{3}\right) = 0. \quad (V)$$

1. Пусть, далее, требуется составить задачу, которая должна иметь два значения неизвестной величины:  $x_1 = 15$ ;  $x_2 = 10$ ; иначе говоря, решение задачи должно сводиться к уравнениям:

$$(x - 15)(x - 10) = 0; \quad (V_1)$$

$$x^2 - 25x + 150 = 0. \quad (IV_1)$$

Пусть искомое уравнение имеет вначале вид:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+k} = p; \text{ при } k = -5 \text{ имеем уравнение:}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-5} = p; \quad (I_1)$$

$$\begin{aligned} ax - 5a + bx &= px^2 - 5px; \\ px^2 - (5p + a + b)x + 5a &= 0. \end{aligned} \quad (II_1)$$

Приравнявая коэффициенты уравнения  $(IV_1)$ , и  $(II_1)$ , получим:

$$p = 1; a = 30; -(5 \cdot 1 + 30 + b) = -25.$$

Откуда  $b = -10$ . Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{30}{x} - \frac{10}{x-5} = 1. \quad (I_1)$$

Для составления задачи мы можем обе части данного уравнения умножить на какое-либо число, например на 4:

$$\frac{120}{x} - \frac{40}{x-5} = 4. \quad (I_2)$$

Соответствующая задача:

Через одну трубу в минуту поступает на 5 гл воды меньше, чем через другую. Определить пропускную способность каждой трубы, зная, что через первую трубу 120 гл воды вливаются за время, большее на 4 минуты, чем время, за которое через вторую трубу вливается 40 гл воды.

О т в е т. 10 гл и 5 гл; 15 гл и 10 гл.  $(IV_1)$ .

2. Составим еще одну задачу к уравнению  $(IV_1)$ .

Наблюдая соотношение между параметрами исходного уравнения  $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+k} = p$ , замечаем, что значение  $p$  можно заранее принять равным 1, а в качестве параметра  $k$  удобнее взять делитель числа 150.

Пусть, например,  $k = +6$  (в первой задаче  $k = -5$ ).

$$\text{Имеем: } \frac{a}{x} + \frac{b}{x+6} = 1. \quad (I_2)$$



$$ax + 6a + bx = x^2 + 6x; x^2 + (6 - a - b)x - 6a = 0.$$

Приравнявая коэффициенты этого уравнения к коэффициентам уравнения  $x^2 - 25x + 150 = 0$  (IV<sub>1</sub>), находим:  $-6a = 150$ ,  $a = -25$ ;  $6 + 25 - b = -25$ ;  $b = 56$ .

Получаем следующее уравнение:

$$-\frac{25}{x} + \frac{56}{x+6} = 1.$$

Помножив обе части уравнения на произвольное число, например на 8, перепишем его так:

$$\frac{448}{x+6} - \frac{200}{6} = 8.$$

Условие соответствующей задачи может быть, например, таким:

Два груза весом 448 Г и 200 Г расположены на горизонтальной плоскости. Площадь опоры первого груза на 6 см<sup>2</sup> больше площади опоры второго груза. Определить площадь опоры каждого груза, если давление первого груза на 8  $\frac{\text{Г}}{\text{см}^2}$  больше давления второго груза.

О т в е т. 16 см<sup>2</sup> и 10 см<sup>2</sup>; 21 см<sup>2</sup> и 15 см<sup>2</sup>.

В задачниках по алгебре обычно отсутствуют задачи, при решении которых отрицательный корень соответствующего уравнения имел бы реальный смысл; поэтому среди учеников распространена привычка, не раздумывая, отбрасывать отрицательные решения, как не имеющие смысла.

Составим задачу, в которой имеют смысл и отрицательный и положительный корни соответствующего уравнения.

Пусть задача должна приводиться к уравнению  $(x-3)(x+4) = 0$  или к уравнению  $x^2 + x - 12 = 0$ . (А)

Пусть вначале по условию задачи должно получаться уравнение вида:

$$\frac{a}{m+x} + \frac{b}{m-x} = c; \quad (\text{Б})$$

$$\begin{aligned} am - ax + bm + bx &= cm^2 - cx^2; \\ cx^2 + (b-a)x + am + bm - cm^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{В})$$

Приравнявая коэффициенты уравнений (А) и (В), имеем:

$$c = 1; b - a = +1; m(a + b - cm) = -12.$$

Наметим произвольное значение  $m$ , например, равным 12; тогда из последнего уравнения получим:  $12 \cdot (a + b - 1 \cdot 12) = -12$ ;  $a + b = 11$ ; но  $b = a + 1$ , и поэтому  $2a + 1 = 11$ ;  $a = 5$ ;  $b = 6$ .

Уравнение выглядит так:

Последнее  
части, напри

Сформулир  
Пароход пр  
в противополо  
(Время, затра  
рость пароход

Решение ур  
ней:  $x_1 = 3$ ;

Оба корня

отвечает то

рохода совпад

рость течения

тому случаю,

хода и течения

ния реки — 4

Такие зада

(в данном слу

тельны для у

Отметим, ч

менять мест

## 8. СОС

При состав  
нений второй

ний, получать

На 420 руб

ше, чем второ

вого сорта был

была бы сниже

лено на 5 м м

второго сорта

Решение

О т в е т.



$$\frac{5}{12+x} + \frac{6}{12-x} = 1. \quad (Б)$$

Последнее уравнение можно видоизменить, умножив обе его части, например, на 4:

$$\frac{20}{12+x} + \frac{24}{12-x} = 4. \quad (Б_1)$$

Сформулируем задачу, соответствующую уравнению (Б<sub>1</sub>):

*Пароход прошел по реке 20 км в одном направлении и затем 24 км в противоположном направлении, затратив на весь путь 4 часа. (Время, затраченное на остановки, исключается.) Собственная скорость парохода 12 км/ч. Определить скорость течения реки.*

Решение уравнения к задаче завершается получением двух корней:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -4$ .

Оба корня имеют реальный смысл: положительный корень соответствует тому случаю, когда вначале направление движения парохода совпадает с направлением течения реки (в этом случае скорость течения реки 3 км/ч); отрицательный корень соответствует тому случаю, когда на первом этапе направления движения парохода и течения реки противоположны (в этом случае скорость течения реки — 4 км/ч).

Такие задачи, в которых оба значения направленной величины (в данном случае, скорости) имеют реальный смысл, весьма поучительны для учащихся.

Отметим, что в условии задачи числа 20 км и 24 км можно поменять местами.

## 8. СОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

При составлении задач, решаемых посредством системы уравнений второй степени, ученики могут, видоизменяя форму уравнений, получать новые задачи. Покажем это на одном примере:

*На 420 руб. можно купить материи первого сорта на 7 м меньше, чем второго сорта на ту же сумму. Если бы цена материи первого сорта была бы снижена на 2 руб, а цена материи второго сорта была бы снижена на 18 руб. за метр, то первого сорта было бы куплено на 5 м меньше, чем второго. Указать цену материи первого и второго сорта в отдельности.*

**Решение.**

$$\begin{cases} \frac{420}{x} - \frac{420}{y} = 7; \\ \frac{420}{x-2} - \frac{420}{y-18} = 5. \end{cases} \quad (I)$$

**О т в е т.** 30 руб.; 60 руб.



После решения этой задачи ученики могут преобразованием исходной задачи получить новые задачи, соответствующие системам, полученным из системы (I) вариацией знаков членов левой части:

$$\begin{cases} \frac{420}{x} + \frac{420}{y} = 21, \\ \frac{420}{x-2} - \frac{420}{y-18} = 5; \end{cases} \quad (II)$$

$$\begin{cases} \frac{420}{x} + \frac{420}{y} = 21, \\ \frac{420}{x-2} + \frac{420}{y-18} = 25; \end{cases} \quad (III)$$

$$\begin{cases} \frac{420}{x} - \frac{420}{y} = 7, \\ \frac{420}{x-2} + \frac{420}{y-18} = 25. \end{cases} \quad (IV)$$

Условие последней задачи можно составить так:

Если на покупку материи каждого сорта затратить по 420 руб., то первого сорта можно купить на 7 м меньше, чем второго. Если бы цена материи первого сорта была снижена на 2 руб., а цена материи второго сорта была бы снижена на 18 руб., то всего было бы куплено при тех же затратах 25 м. Определить цену каждого сорта материи.

Кроме составления задач посредством варьирования знаков в уравнениях (т. е. преобразования задач), возможно составлять задачи и по аналогии с решенными.

Пусть дана задача:

Среднее арифметическое двух чисел равно 29, а среднее геометрическое равно 21. Найти эти числа.

Решение.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 29, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Ответ. 9 и 49

Легко составить подобную задачу, наметив заранее ответ.

Пусть  $x = 25$ ,  $y = 1$ .

Имеем:

$$\frac{25+1}{2} = 13. \quad 25 \cdot 1 = 25$$



Далее ученики составляют систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 13, \\ xy = 5, \end{cases}$$

формулируют условие соответствующей задачи и решают составленную задачу.

Пусть еще дана задача:

По круговой дорожке длиной 660 м движутся два конькобежца навстречу друг другу и сходятся через каждую минуту. Найти скорость каждого из них, если первый пробегает окружность на 22 секунды скорее второго.

Решение. 
$$\begin{cases} \frac{660}{x+y} = 60, \\ \frac{660}{x} - \frac{660}{y} = 22. \end{cases}$$
 Ответ. 6 м/сек; 5 м/сек.

Нетрудно составить аналогичную задачу.  
Составим систему числовых тождеств:

$$\begin{cases} \frac{546}{7+6} = 42; \\ \frac{546}{7} - \frac{546}{6} = 13. \end{cases}$$

Затем преобразуем систему тождеств в систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{546}{x+y} = 42, \\ \frac{546}{x} - \frac{546}{y} = 13, \end{cases}$$

а по системе составим условие задачи.

\* \* \*

Проведенная нами классификация задач на основе применения понятия «способ сравнения чисел» помогает учителю разобраться в совокупности задач и связях между ними; при необходимости учитель может составить сам недостающие в школьном задачнике разновидности задач.

Большинство из описанных приемов составления задач, как показывает наша практика, вполне доступно для учеников.

Чтобы облегчить составление задач учащимися, надо повесить в классе справочную таблицу разнообразных величин: скоростей, цен, географических и биологических данных и т. п.



## ЧАСТЬ IV

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ УПРАЖНЕНИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ

В предыдущих разделах книги, посвященных арифметике и алгебре, мы обсудили приемы и методы обучения, содействующие ускоренному и углубленному усвоению материала посредством укрупнения единицы усвоения.

Тот же методический подход оправдывает себя и при обучении геометрии.

В качестве конкретных средств достижения указанной цели выступают следующие:

1. Составление и решение обратных задач, рассматриваемых как непосредственное продолжение прямой задачи.

2. Одновременное изучение прямых и обратных (или прямых и противоположных) теорем.

### 1. ОБ ИЗУЧЕНИИ ГРУППЫ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРЕМ

В качестве важного средства укрупнения единицы усвоения геометрических знаний выступает метод одновременного рассмотрения взаимосвязанных задач и теорем.

Эта работа облегчается, если в предыдущих классах проводилась аналогичная работа по арифметике и алгебре.

Возможности такой работы покажем на различных примерах.

1. а) Многие задачи на вычисление решаются двумя (или больше) способами; в этих случаях надо указать учащимся, что совпадение результатов при обоих способах решения подтверждает правильность полученных ответов.

**Задача.** В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые; диагональ  $AC$  образует со стороной  $AB$  угол в  $40^\circ$ , а со стороной  $AD$ —угол в  $30^\circ$ . Определить острый угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$  (рис. 74).

**Дано:**  $\angle B = 90^\circ$ ;  $\angle D = 90^\circ$ ;  $\angle CAB = 40^\circ$ ;  $\angle CAD = 30^\circ$ .

**Определить:**  $\angle CMD = x$ .



Решение.

1. Определим дугу  $CD$ , она равна  $30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$ , так как на нее опирается вписанный угол в  $30^\circ$ .

2. На дугу  $BC$  опирается вписанный угол в  $40^\circ$ , и поэтому дуга  $BC$  равна  $40^\circ \cdot 2 = 80^\circ$ .

$$3. \cup AB = \cup AC - \cup BC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

4.  $\angle CMD$  имеет вершину внутри круга, и поэтому

$$\angle CMD = \frac{\cup AB + \cup CD}{2} = \frac{100^\circ + 60^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Проверка (решаем вторым способом).

1. Определяем  $\cup BC$ ,  $\cup BC = 40^\circ \cdot 2 = 80^\circ$ .

2. Определяем  $\cup AB$ ,  $\cup AB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

3. Найдем вписанный угол  $BDA$ , опирающийся на  $\cup AB$ ;

$$\angle BDA = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

4.  $\angle CMD$  внешний для треугольника  $AMD$  и поэтому  $\angle CMD = \angle MDA + \angle CAD = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$ .

Оба способа решения привели к одному и тому же ответу.

Упражнением, весьма удобным для развития мышления и логически прозрачным для учащихся, выступает составление обратной задачи.

К рассмотренной задаче также можно составить и решить обратную задачу.

Чтобы составить обратную задачу, надо поменять местами одно из данных в условии с искомой величиной прямой задачи. Всего можно составить таким образом четыре обратные задачи.

1-я обратная задача.

Дано:

$$\angle CMD = 80^\circ; \quad \angle D = 90^\circ; \\ \angle CAB = 40^\circ; \quad \angle CAD = 30^\circ.$$

Найти:  $\angle B$ .

3-я обратная задача.

Дано:

$$\angle CMD = 80^\circ; \quad \angle B = 90^\circ; \\ \angle D = 90^\circ; \quad \angle CAD = 30^\circ.$$

Найти:  $\angle CAB$ .

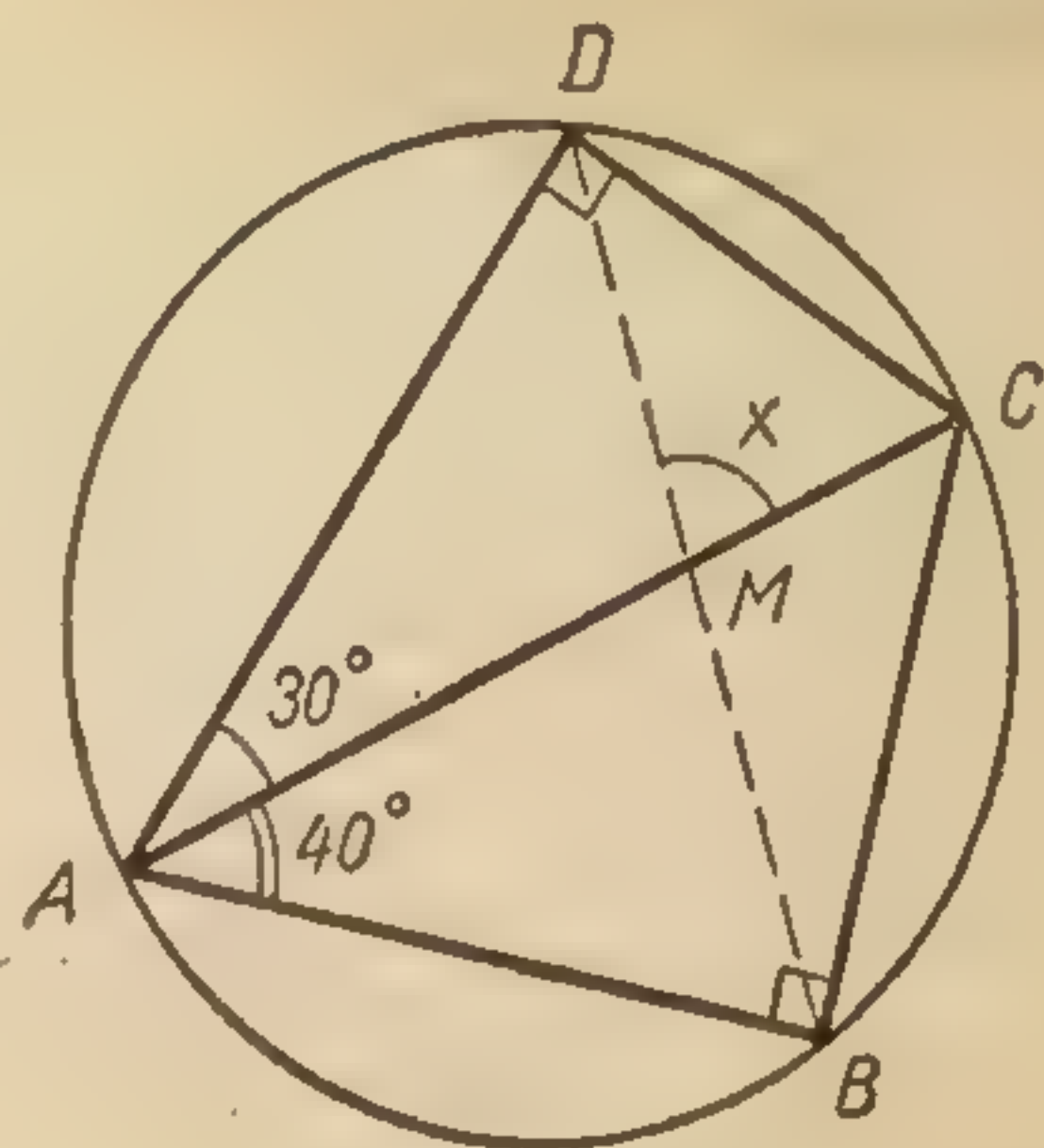


Рис. 74

2-я обратная задача.

Дано:

$$\angle CMD = 80^\circ; \quad \angle B = 90^\circ; \\ \angle CAB = 40^\circ; \quad \angle CAD = 30^\circ.$$

Найти:  $\angle D$ .

4-я обратная задача.

Дано:

$$\angle CMD = 80^\circ; \quad \angle B = 90^\circ; \\ \angle D = 90^\circ; \quad \angle CAB = 40^\circ.$$

Найти:  $\angle CAD$ .



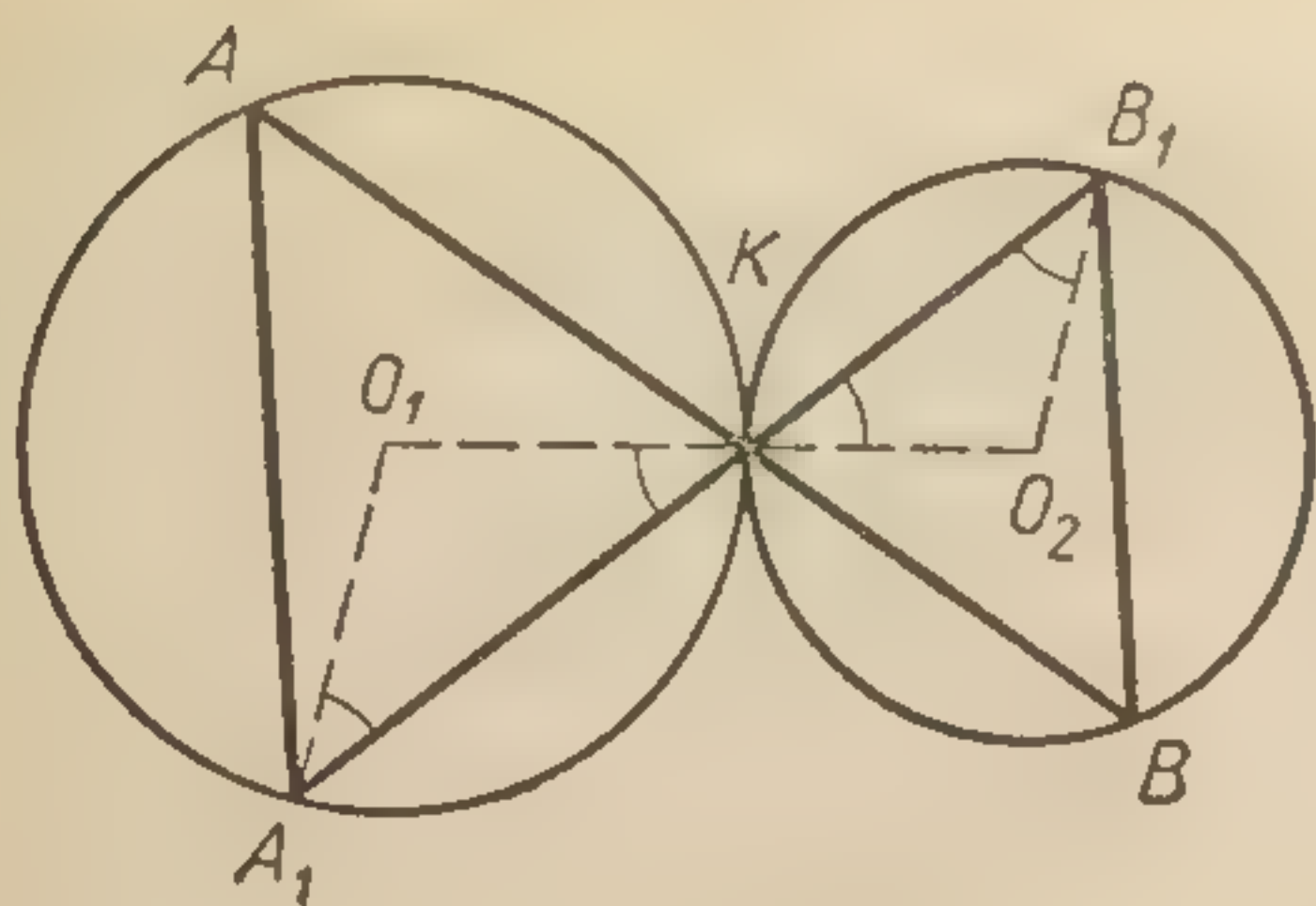


Рис. 75

Решим для образца последнюю обратную задачу:

$$1) \cup CB = 2 \cdot \angle CAB = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ;$$

$$2) \cup AB = \cup CBA - \cup CB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$3) \cup AB + \cup DC = 2 \times \angle AMB = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ;$$

$$4) \cup DC = 160^\circ - 100^\circ = 60^\circ;$$

$$5) \angle CAD = \frac{\cup DC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Последняя обратная задача оказалась несколько сложнее прямой задачи.

Разумеется, нет необходимости составлять и решать все обратные задачи.

Но учащиеся должны усвоить прием составления обратных задач, сходный с тем, что делалось в алгебре.

После решения обратной задачи полезно сравнить строение и решение прямой и обратной задач и совместно с учащимися установить следующее: если, например, в решении прямой задачи мы находим величину  $\angle AMB$ , как половину известной суммы дуг  $DC$  и  $AB$ , то в обратной задаче придется находить сумму этих дуг, равную удвоенному углу  $AMB$ .

Основное значение сравнения решения прямой и обратной задач как раз и заключается в превращении прямой связи мыслей («делить сумму дуг на 2») в обратную связь мыслей («умножить угол на 2»).

Как мы не раз отмечали выше, успешность обучения математике зависит прежде всего от возникновения этой замкнутой системы связей и мыслей в результате немедленной перестройки прямой связи мыслей в обратную связь мыслей.

Тем самым соответствующее умозаключение обретает логическую целостность, включая не только исходное суждение, но и его следствие.

2. После решения задач на доказательство часто бывает также поучительным составить и решить обратную задачу (т. е. доказать обратную теорему).

Пусть решена задача:

Если через точку касания двух окружностей провести две секущие и концы их соединить, то эти хорды параллельны (рис. 75).

Дано: окружности  $O_1$  и  $O_2$  касаются в точке  $K$ ;

$AKB$  и  $A_1KB_1$  — общие секущие двух окружностей.



Доказать:  $AA_1 \parallel BB_1$ .

Доказательство.

1) Как известно, центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$  и точка их касания  $K$  лежат на одной прямой (линии центров), поэтому  $\angle O_1KA_1 = \angle O_2KB_1 = \angle O_2B_1K = \angle 1$ . Значит, третьи углы треугольников тоже равны:

$$\angle A_1O_1K = \angle KO_2B_1 = 180^\circ - 2 \cdot \angle 1.$$

2) Но данные углы центральные; равным центральным углам соответствуют равные дуги:

$$\cup A_1K = \cup B_1K.$$

3) Равным дугам соответствуют равные вписанные углы:

$$\angle A_1AK = \angle B_1BK.$$

4) Но эти углы являются накрест лежащими при прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ . Значит,  $AA_1 \parallel BB_1$ .

Обратная задача.

Сначала запишем кратко условие обратной задачи.

Дано:  $AA_1 \parallel BB_1$ ; окружности  $O_1$  и  $O_2$  касаются в точке  $K$ ;  $AKB$  — секущая.

Доказать:  $A_1KB_1$  — секущая (т. е. точки  $A_1, K, B_1$  лежат на одной прямой).

Сформулируем условие обратной задачи:

Если через точку касания  $K$  двух окружностей провести секущую  $AKB$ , а через точки пересечения этой секущей с окружностями ( $A$  и  $B$ ) провести параллельные хорды  $AA_1, BB_1$ , то точки  $A_1, K, B_1$  будут лежать на одной прямой.

Доказательство.

1)  $\angle KAA_1 = \angle KBB_1$ , как накрест лежащие при параллельных ( $AA_1 \parallel BB_1$ ).

2) Но эти углы вписанные. Равные вписанные углы опираются на равные дуги:

$$\cup A_1K = \cup B_1K.$$

3) Равным дугам соответствуют равные центральные углы:

$$\angle A_1O_1K = \angle B_1O_2K.$$

4)  $\triangle A_1O_1K$  и  $\triangle B_1O_2K$  равнобедренные. Значит, равны и углы при основании этих треугольников:

$$\angle O_1KA_1 = \angle O_2KB_1 = \frac{180^\circ - \angle A_1O_1K}{2}.$$

Отсюда следует, что  $B_1K$  является продолжением прямой  $A_1K$ : точки  $A_1, K, B_1$  лежат на одной прямой.

Сравнивая доказательства прямой и обратной теорем, мы обнаружим, что в этих процессах проявляются новые взаимосвязи.



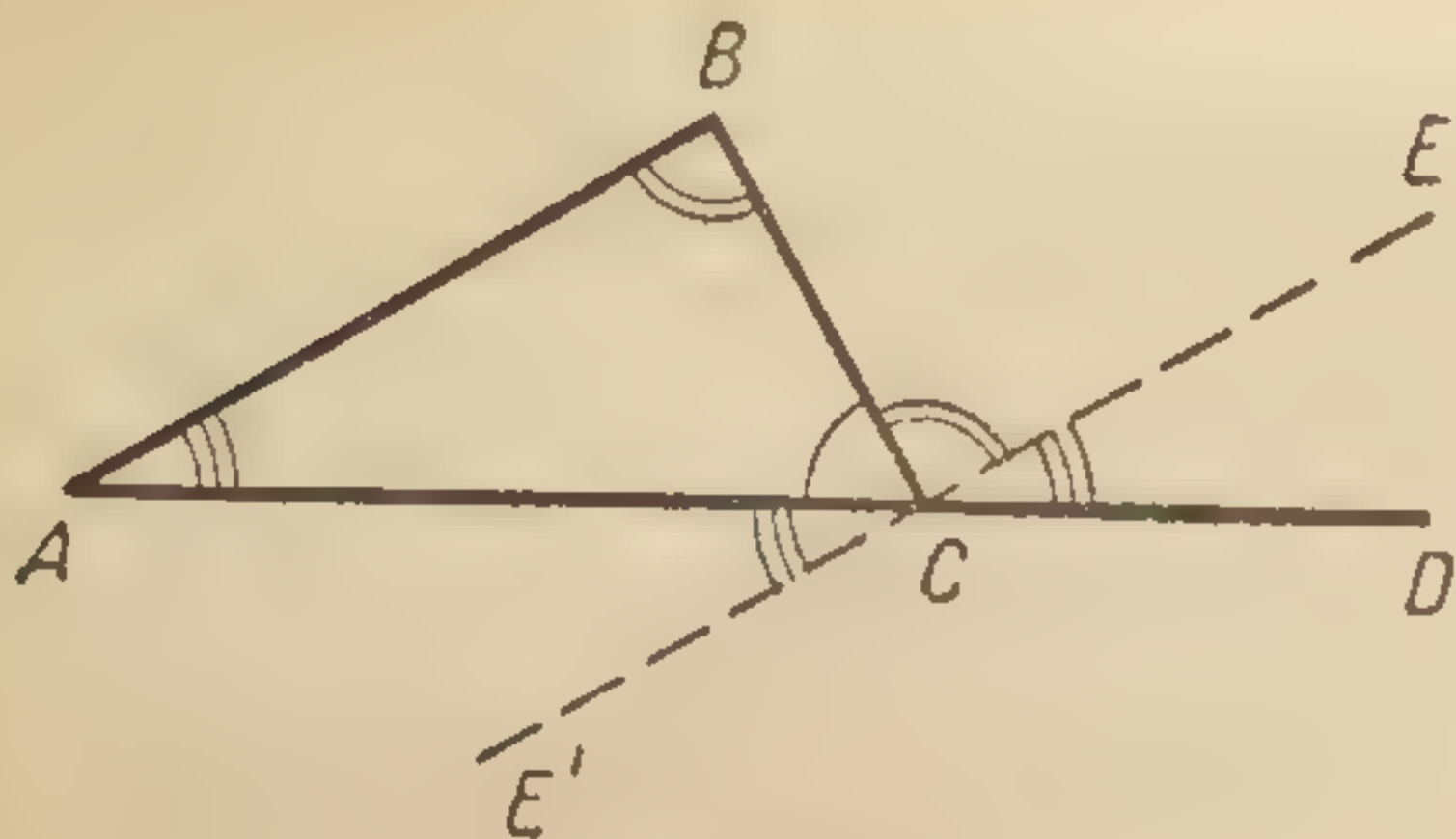


Рис. 76

Доказать:  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (рис 76).

Доказательство (обычное).

1. Проведем прямую  $CE \parallel AB$ .
2. Тогда  $\angle ABC = \angle BCE$  на основании свойства накрест лежащих углов при параллельных  $AB$  и  $CE$ .
3. Продолжим сторону  $AC$ . Тогда  $\angle BAC = \angle ECD$  на основании свойства соответственных углов при параллельных  $AB$  и  $CE$ .
4. Три угла, расположенные по одну сторону прямой  $ACD$  и имеющие общую вершину, в сумме составляют развернутый угол  $\angle BCA + \angle BCE + \angle ECD = 180^\circ$ .

Заменив два последних угла равными им углами, получаем:

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ.$$

Это доказательство, несмотря на кажущуюся краткость, имеет в психологическом отношении тот недостаток, что первый шаг — проведение прямой  $CE$ , параллельной  $AB$ , — для учащихся ничем не мотивирован: им непонятно, как учитель «догадался» провести именно параллельную прямую и для чего это делает.

Подобный недочет присущ вообще синтетическим готовым доказательствам, приведенным в учебнике и заучиваемым учащимися.

Рассмотрим другое доказательство этой теоремы, структурно противоположное первому доказательству.

I. Построим  $\angle BCE = \angle ABC$  (чтобы сначала найти сумму двух углов:  $\angle C$  и  $\angle B$ ).

II. Но углы  $ABC$  и  $BCE$  накрест лежащие. На основании признака параллельности прямых получим:  $CE \parallel AB$ .

III. Мы построили при одной вершине два угла. Пристроим к углу  $BCA$  с другой стороны угол  $ACE'$ , равный углу  $BAC$  (чтобы найти сумму трех углов:  $\angle BCE$ ,  $\angle ACB$ ,  $\angle ACE'$ ). Равные углы  $BAC$  и  $ACE'$  накрест лежащие.

На основании признака параллельности прямых получим:  $CE' \parallel AB$ .

Итак, мы имеем: через одну точку  $C$  проведены две прямые, параллельные одной и той же третьей прямой:  $CE \parallel AB$  и  $CE' \parallel AB$ .

3. Это же явление, столь важное для развития мышления, обнаруживается иногда и при доказательстве одной и той же теоремы двумя структурно противоположными способами.

Уточним эту мысль на одном примере.

**Теорема.** Сумма внутренних углов треугольника равна  $180^\circ$ .



IV. Но на основании аксиомы параллельных имеем: через одну точку  $C$  можно провести лишь одну прямую, параллельную  $AB$ . Значит, прямые  $CE$  и  $CE'$  совпадают.

V. Сумма трех углов при вершине  $C$  равна развернутому углу:  $\angle ACE' + \angle ACB + \angle BCE = 180^\circ$ .

Заменив два из этих углов равными им углами, получим:  $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$ .

Сравним эти доказательства.

В первом доказательстве используются свойства углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных третьей (пункты 2, 3). Во втором доказательстве используются обратные теоремы — признаки параллельности прямых (пункты II, III).

Во втором доказательстве имеется новый элемент — ссылка на аксиому о параллельных; к тому же начало второго доказательства понятнее учащимся, чем начало первого: поскольку в теореме речь идет о сумме углов треугольника, надо попытаться пристроить эти углы при вершине (так как это делается при опытном определении суммы углов треугольника).

Сравнение двух доказательств одной теоремы как бы создает внутреннюю целостность группы теорем, внутри которой устанавливаются циклические связи между отдельными теоремами.

В данной связи остановимся еще на одном вопросе.

4. В школьном курсе геометрии иногда ограничиваются доказательством прямой теоремы; в то же время пользуются часто в последствии обратной теоремой как фактом, якобы само собою разумеющимся, хотя она не была доказана и нередко даже не было указано на необходимость особого доказательства обратной теоремы.

Такая практика приводит к тому, что учащиеся склонны всюду считать, что там, где верна прямая теорема, верна также и обратная, и иногда попросту отождествляют эти теоремы.

Если доказательство прямой теоремы рассмотрено в учебнике, а обратной теоремы нет там, то учитель может предложить обратную теорему в виде задачи на доказательство.

Рассмотрим дальше еще один пример, когда целесообразно противопоставлять прямые и обратные теоремы в курсе геометрии.

После доказательства теорем о соотношениях между элементами треугольника целесообразно сформулировать обобщенное суждение следующим образом.

Сведем доказанные три теоремы:

1. Если в треугольнике  $\angle C < 90^\circ$ , то  $c^2 = a^2 - 2ab + b^2$  или  $c^2 < a^2 + b^2$ .

2. Если в треугольнике  $\angle C = 90^\circ$ , то верна теорема Пифагора:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

3. Если в треугольнике  $\angle C > 90^\circ$ , то  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab'$ , или  $c^2 > a^2 + b^2$ .



Эти три теоремы можно выразить в следующем обобщенном суждении:

*Если сторона треугольника лежит против острого (прямого, тупого) угла, то квадрат этой стороны соответственно меньше (равен, больше) суммы квадратов двух других сторон.*

Сформулируем теперь обратную теорему:

*Если квадрат одной стороны треугольника меньше (равен, больше) суммы квадратов двух других сторон, то против этой стороны лежит соответственно острый (прямой, тупой) угол.*

В последней теореме по существу заключаются три теоремы. Рассмотрим первую из них:

Дано:  $c^2 < a^2 + b^2$  (A). Доказать:  $\angle C < 90^\circ$ .

Доказательство (методом от противоречащего).

Пусть данный угол не острый. Тогда он может быть либо прямым, либо тупым.

Если же он прямой, то согласно прямой теореме (2) имеем:  $c^2 = a^2 + b^2$ , что противоречит условию данной теоремы (A).

Если же он тупой, то согласно прямой теореме (3) имеем:  $c^2 > a^2 + b^2$ , что также противоречит условию (A).

Остается принять, что данный угол острый.

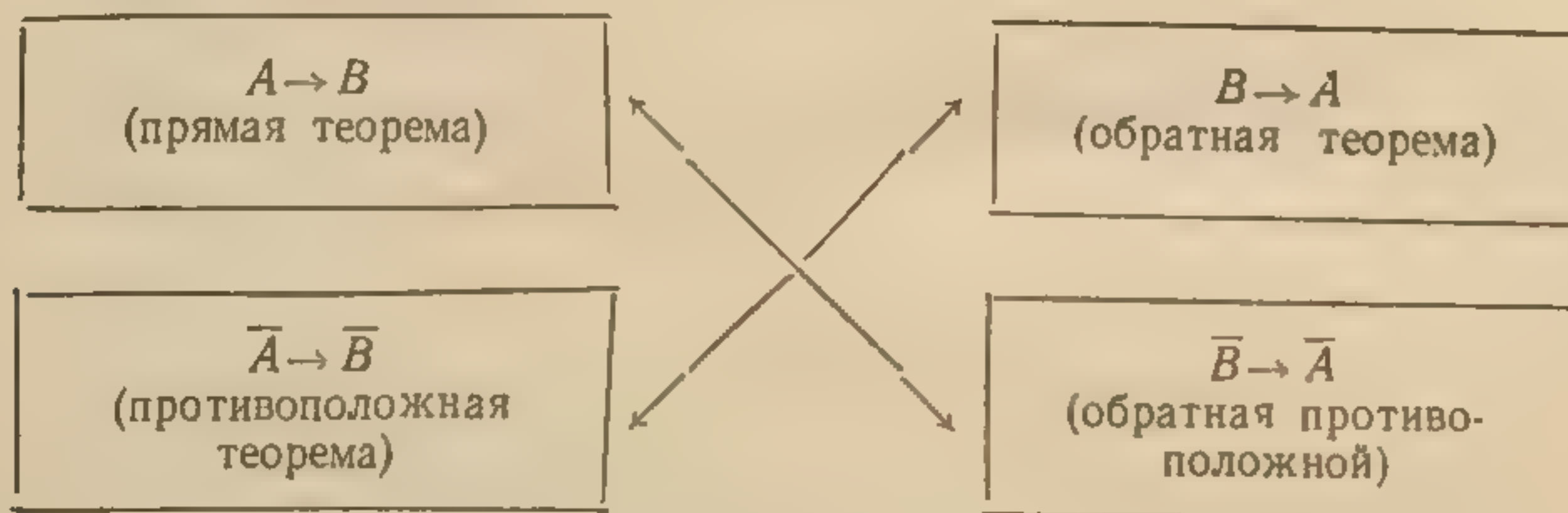
Можно предложить сформулировать и доказать аналогичным приемом две другие обратные теоремы, являющиеся достаточными признаками прямоугольного и тупоугольного треугольников.

Удобно записать все шесть теорем символически совместно:

$$[c^2 \lessgtr a^2 + b^2] \Leftrightarrow [\angle C \lessgtr 90^\circ]$$

## 2. ОБ ИЗУЧЕНИИ ЧЕТВЕРКИ ТЕОРЕМ «ЛОГИЧЕСКОГО КВАДРАТА»

Одним из наиболее поучительных вопросов курса геометрии является четкое понимание учащимися взаимосвязей между теоремами «логического квадрата».



Представляется крайне важным хотя бы по 1—2 раза в каждом классе — мы весьма скромны в своих пожеланиях! — подробно



рассмотреть по одной исходной теореме доказательства всех четырех теорем с последующим сравнением процессов доказательства.

Рассмотрим соответствующую методику на простом примере.

Пусть доказана прямая теорема  $(A \rightarrow B)$  (рис. 77):

*Всякая точка, лежащая на перпендикуляре к отрезку, проведенному через его середину, равноудалена от концов этого отрезка.*

Пусть доказана также и обратная теорема  $(B \rightarrow A)$ :

*Всякая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка.*

Запишем рядом символически условия прямой и обратной теорем (рис. 77):

Прямая.  
Дано:  $OA = OB$ ;  $OE \perp AB$   
 $K \in OE$   
Доказать:  $AK = KB$

Обратная.  
 $AK = KB$ ;  $OE \perp AB$   
 $K \in OE$   
 $OA = OB$

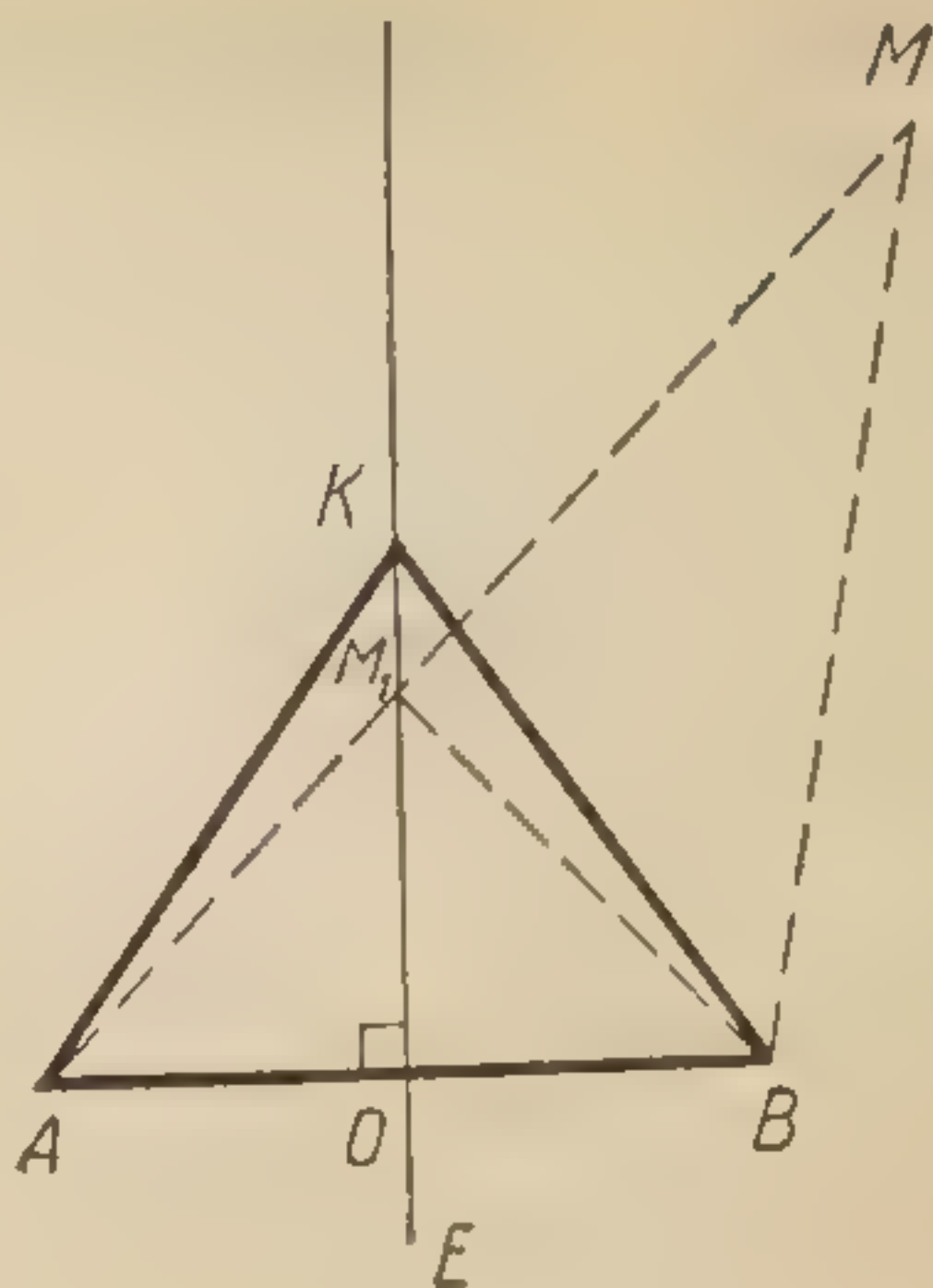


Рис. 77

Обратим внимание на то, что с точки зрения логики лишь после доказательства обеих теорем можно сформулировать следующее суждение: «Геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является перпендикуляр, проведенный через середину отрезка».

Именно такой путь введения понятия «геометрическое место точек» принят в учебнике А. П. Киселева.

В плане формальной логики нет необходимости по данной теме дополнительно рассматривать еще и третью теорему, а именно противоположную теорему, так как она одновременно ложна или истинна вместе с прямой теоремой.

Однако, как показывает практика, дидактически целесообразно сформулировать и доказать еще и третью теорему, а именно противоположную теорему методом от противоречащего.

(Последняя теорема несет существенно новую информацию, учит новым способом рассуждения.)

Противоположная теорема. *Всякая точка, не лежащая на перпендикуляре к отрезку, проведенному через его середину, неодинаково удалена от концов этого отрезка.*



Д а н о:  $EO \perp AB$   
 $OA = OB$   
 $M \notin OE$

Д о к а з а т ь:  $MA \neq MB$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам нужно доказать, что  $MA \neq MB$  (рис. 77). Допустим противоречащее: пусть  $MA = MB$ .

Тогда на основании обратной теоремы точка  $M$  должна бы лежать на перпендикуляре  $EO$ , проведенном через середину отрезка  $AB$ , что противоречит условию настоящей теоремы.

Значит, допущенное нами предположение, что  $MA = MB$ , неверно; остается принять, что  $MA \neq MB$ .

После этого необходимо указать учащимся на следующие обстоятельства:

1. Обратная и противоположная теоремы оказались обе истинными:  
 $(B \longrightarrow A) \longleftarrow \longrightarrow (\bar{A} \longrightarrow \bar{B})$ .

2. Обратная теорема доказана непосредственно, т. е. без ссылки на прямую теорему, независимо от нее.

3. В доказательстве противоположной теоремы методом от противоречащего имеется, напротив, ссылка на обратную теорему; значит, если бы обратная теорема не была раньше доказана, то невозможно было бы доказать противоположную теорему методом от противоречащего.

Докажем последнюю теорему четверки, а именно теорему, обратную противоположной, также методом от противоречащего (со ссылкой на прямую теорему).

Теорема, обратная противоположной:

$$(\bar{B} \longrightarrow \bar{A})$$

Если точка не равноудалена от концов отрезка, то она не лежит на перпендикуляре, проведенном через середину этого отрезка.

Д а н о:  $EO \perp AB$   
 $OA = OB$   
 $AM \neq MB$

Д о к а з а т ь:  $M \notin OE$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам нужно доказать, что  $M \notin OE$ .

Допустим противоречащее:  $M \in OE$ .

Тогда на основании прямой теоремы точка  $M$  должна бы быть равноудаленной от концов отрезка  $AB$ , что противоречит условию настоящей теоремы.

Значит, допущенное нами предположение, что  $M \in OE$ , неверно; остается принять, что  $M \notin OE$ .

Поучительно сравнить символические записи всех четырех теорем:



Прямая

$$(A \rightarrow B).$$

$$\begin{aligned} \text{Дано: } EO &\perp AB \\ OA &= OB \\ K &\in OE \end{aligned}$$

---


$$\text{Доказать: } KA = KB$$

Противоположная

$$(\bar{A} \rightarrow \bar{B}).$$

$$\begin{aligned} \text{Дано: } EO &\perp AB \\ OA &= OB \\ K &\notin OE \end{aligned}$$

---


$$\text{Доказать: } KA \neq KB$$

Обратная

$$(B \rightarrow A).$$

$$\begin{aligned} EO &\perp AB \\ KA &= KB \end{aligned}$$

$$K \in OE$$

---


$$OA = OB$$

Обратная противоположной

$$(\bar{B} \rightarrow \bar{A}).$$

$$\begin{aligned} EO &\perp AB \\ OA &= OB \\ KA &\neq KB \end{aligned}$$

---


$$K \notin OE$$

Если заранее договориться не писать повторяющиеся в условиях четырех теорем суждения  $(EO \perp AB; OA = OB)$ , то символическая запись теорем становится еще более краткой и наглядной.

В учебнике геометрии Н. Н. Никитина вместо пары «прямая и обратная теоремы» доказывается иногда пара «прямая и противоположная теоремы». Этот шаг достоин всяческой поддержки, поскольку он знакомит с различными логическими формами рассуждений. Однако в нем прямая и противоположная теоремы не отделены логически друг от друга: в учебнике противоположная теорема не сформулирована отдельно от прямой теоремы; доказательство противоположной теоремы помещено в тексте в виде... продолжения доказательства прямой теоремы; не используется в книге и само понятие «противоположная теорема».

Рассмотрим теперь то, как следовало бы изучать эти две теоремы при системе изложения, принятой в учебнике Н. Н. Никитина (где противоположная теорема рассматривается сразу же после прямой теоремы вместо обратной теоремы). Условия обеих теорем целесообразно записать в символах в двух параллельных столбцах.

Прямая теорема.

$$\begin{aligned} \text{Дано: } EO &\perp AB \\ OA &= OB \\ K &\in OE \end{aligned}$$

---


$$\text{Доказать: } KA = KB$$

Противоположная теорема.

$$\begin{aligned} EO &\perp AB \\ OA &= OB \\ K &\notin OE \end{aligned}$$

---


$$KA \neq KB$$

Доказательство прямой теоремы общеизвестно; приведем доказательство противоположной теоремы.

Доказательство.

Пусть точка М находится правее прямой ОЕ (рис. 77).



Соединим точку  $M$  с точками  $A$  и  $B$ . Прямая  $AM$  пересекает прямую  $OE$  в точке  $M_1$ ; поэтому на основании прямой теоремы имеем:  $AM_1 = M_1B$ .

Рассмотрим  $\triangle BM_1M$ . Сумма двух сторон треугольника больше третьей:  $BM_1 + M_1M > MB$ .

Заменяя отрезок  $BM_1$  равным ему отрезком  $AM_1$ , получим:  $AM_1 + MM_1 > MB$ ; или  $AM > MB$ , т. е.  $AM \neq BM$ .

При таком варианте изучения геометрического места точек (прямая теорема — противоположная теорема) нет логической необходимости доказывать третью теорему, так как из истинности противоположной теоремы вытекает по правилу логического квадрата истинность обратной теоремы:

$$(\bar{A} \longrightarrow \bar{B}) \longrightarrow (B \longrightarrow A).$$

Но — повторяем — с дидактической точки зрения исключительно важно доказать еще и третью теорему (обратную теорему) методом от противоречащего.

Выполним это.

**Обратная теорема.** Если точка одинаково удалена от концов отрезка, то она лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка.

**Доказательство** (методом от противоречащего).

Нам надо доказать, что эта точка лежит на перпендикуляре  $OE$ , проходящем через середину отрезка  $AB$ .

Допустим, что она не лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка.

Но тогда на основании доказанной выше противоположной теоремы эта точка должна быть не равноудалена от концов отрезка, что противоречит условию данной теоремы. Итак, сделанное предположение неверно. Остается принять, что эта точка лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка.

Мы намеренно рассмотрели оба варианта изучения геометрического места точек на одном примере, чтобы рельефно показать различие этих подходов.

Возникает далее вопрос: какая же система рассмотрения теорем предпочтительнее в школе? Что целесообразно рассматривать в паре с прямой теоремой: обратную или противоположную? Конечно, в плане формально логическом обе системы равносильны.

Однако с точки зрения развития логического мышления наиболее лучшим подходом было бы применение обеих логических систем применительно к разным разделам курса геометрии.

В общем случае с точки зрения изучения конкретного геометрического факта доказательство обратной теоремы «проще» и вот почему:

1. При доказательстве обратной теоремы рассуждения обычно ведутся о тех же элементах, что и при доказательстве прямой теоремы.



2. При доказательстве обратной теоремы пользуются поэтому тем же чертежом, что и при доказательстве прямой теоремы.

Изучение противоположной теоремы имеет следующие особенности:

1) В то время как при доказательстве прямой и обратной теорем большей частью используются категорические и утвердительные суждения, то формулировка и доказательство противоположной теоремы связаны с применением, сверх того, условных и отрицательных суждений.

2) Доказательство противоположной теоремы основано на анализе соотношений и элементов, отличающихся от тех, которые рассматриваются в прямой и обратной теоремах.

Так, при изучении множества точек, равноудаленных от концов отрезка, в прямой и обратной теоремах рассматриваются лишь точки перпендикуляра  $EO$  (рис. 77); в противоположной теореме рассматриваются точки, не лежащие на  $EO$ , т. е. совокупность точек плоскости, за исключением точек прямой  $EO$ .

Следовательно, не будет ошибкой утверждать, что сочетание прямой и противоположной теорем обеспечивает как бы более наглядный, более полный охват логическим анализом всех элементов данной совокупности (всех точек плоскости).

Рассмотрение пары прямой и противоположной теорем представляется наиболее уместным при изучении геометрических мест (множеств) точек, где выясняются четко свойства точек, лежащих на указанном геометрическом месте и не лежащих на нем.

При изучении остальных теорем, где часто противопоставляются свойства и признаки фигур, удобнее рассматривать прямые и обратные теоремы, причем по установившейся традиции в прямой теореме обычно устанавливаются свойства, а в обратной — признаки геометрических фигур.

Хотя в большинстве случаев изучаются прямые и обратные теоремы, целесообразно, сверх того, в форме задач на доказательство иногда формулировать и доказывать противоположные теоремы.

### 3. МЕТОДИКА СОВМЕСТНОГО ИЗУЧЕНИЯ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМ

В практике обучения по многовековой традиции взаимно обратные теоремы изучаются на разных уроках, а между ними располагаются другие теоремы; иначе говоря, процессы доказательства этих теорем не становятся предметом анализа даже на смежных уроках. Это обстоятельство является существенным недостатком системы обучения, при такой практике искусственно задерживается развитие знаний учащихся, не возникает своевременного обобщения знаний.

Как известно, в геометрии одно из центральных значений обретают понятия «геометрическое место точек» (множество точек) и «характеристическое свойство фигуры».



Чтобы установить то и другое, необходимо убедиться в правильности как прямой, так и обратной теоремы.

Так, например, параллелограмм имеет много различных свойств: у него четыре вершины, четыре стороны, две диагонали, четыре угла; каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника; в параллелограмме противоположные стороны равны и т. д.

Не каждое из перечисленных свойств будет характеристическим, каковым является лишь последнее из них.

Чтобы установить характеристическое свойство фигуры, надо сознательно преобразовать доказанную прямую теорему в обратную и попытаться доказать последнюю.

Разумеется, доказательство обратной теоремы чаще всего строится на базе иного комплекса определений, теорем, чем те, которые были использованы при доказательстве прямой теоремы.

В таких случаях приобретает большую ценность, как это мы видим выше, хотя бы факт немедленной формулировки обратной теоремы на основе прямой теоремы, еще до доказательства прямой теоремы.

Доказательство же обратной теоремы в подобных случаях может быть рассмотрено на следующем уроке.

Существенно важно уже то, что в описываемой методике прямые и обратные теоремы следуют друг за другом, а не разведены во времени друг от друга; к сожалению, современным учебникам присуща именно такая неудобная структура.

В данной работе мы рассмотрим тот случай, далеко не исключительный, когда удастся буквально на одном уроке рассмотреть доказательство прямой и обратной теорем, причем пользуясь одной и той же схемой доказательства.

Последнее возможно лишь тогда, когда доказательство обратной теоремы представляет «чистое обращение» доказательства прямой теоремы.

Этому условию удовлетворяет, в частности, следующая пара взаимно обратных теорем о параллелограмме.

Свойство параллелограмма (прямая теорема)

$$(A \rightarrow B)$$

Если четырехугольник является параллелограммом, то в нем противоположные стороны равны.

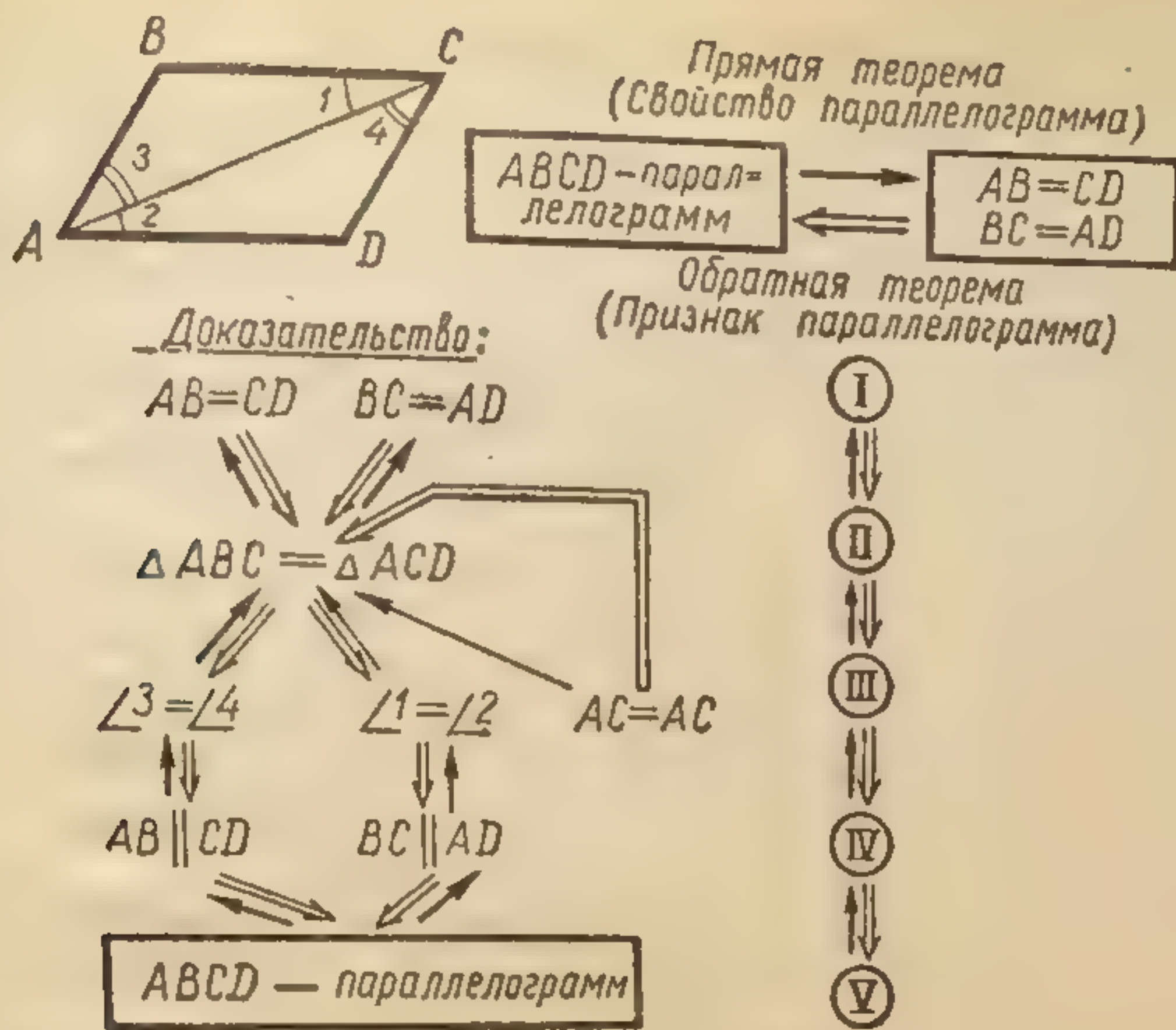
Признак параллелограмма (обратная теорема)

$$(B \rightarrow A).$$

Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то он является параллелограммом.

Приведенная схема весьма наглядна и информативно насыщена: на ней изображено как доказательство прямой теоремы (одинар-





ные стрелки), так и доказательство обратной теоремы (двойные стрелки).

Внимательный анализ схемы позволяет выявить факторы, которые нередко упускаются учащимися или учителем при обычной практике обучения доказательству теоремы.

Всего мы видим на схеме пять суждений, каждое из которых занимает строчку.

Переход от одного суждения к другому означает силлогизм: стало быть, доказательство как прямой, так и обратной теоремы состоит из четырех силлогизмов:

$$I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow III \Leftrightarrow IV \Leftrightarrow V$$

(Можно, конечно, обнаружить еще и частные силлогизмы, входящие в указанные основные силлогизмы.)

Внимательно изучая схему, мы видим, как процесс доказательства распадается на отдельных участках на две параллельные цепи силлогизмов (умозаключений); кроме того, видно, что некоторые умозаключения составные; так, для доказательства равенства трех углов необходимо установить равенство трех пар величин (это изображено на схеме тремя стрелками, направленными к знаку равенства треугольников).

Стрелки ведут мысль ученика: научиться «одевать» каждую из них в словесную форму — вот в чем состоит задача для ученика.

Надо объяснить учащимся обычный смысл стрелки как знака импликации: начало стрелки — основание суждения, конец стрелки — заключение суждения.



Стало быть, двигаясь по направлению стрелки (от начала стрелки к ее концу), мы получим синтетическое (дедуктивное) доказательство, излагаемое в учебниках.

В этом случае каждое умозаключение строится по форме: если  $A$ , то  $B$  ( $A \rightarrow B$ ).

Однако наиболее поучительный момент использования приведенной схемы — это обучение по ней анализу доказательства (для этого надо вести рассуждение, двигаясь против направления стрелки, от конца стрелки к ее началу).

Структура соответствующего аналитического суждения будет такова:

«Для того чтобы доказать  $D$ , необходимо сначала доказать  $C$ » ( $D \leftarrow C$ ).

Таким образом, по приведенной схеме можно учить следующим процессам:

1) анализу доказательства прямой теоремы (рассуждение ведем по схеме сверху, против направления одинарных стрелок:  $I \leftarrow V$ );

2) дедуктивному доказательству прямой теоремы (рассуждение ведем по схеме снизу вверх, по направлению одинарных стрелок:  $V \rightarrow \dots I$ ).

При обучении удобно поступать так: после того как один ученик провел по схеме анализ доказательства, второй завершает процесс, т. е. приводит соответствующее дедуктивное доказательство.

Сравним процессы анализа и синтеза (т. е. поиска доказательства и осуществления доказательства) в случае прямой теоремы.

Анализ (поиск) доказательства (читать по схеме сверху вниз).

Чтобы доказать равенство отрезков ( $AB = CD$ ), необходимо доказать равенство треугольников ( $\triangle ABC = \triangle ACD$ ) в которые входят эти отрезки.

Чтобы доказать равенство треугольников ( $\triangle ABC = \triangle ACD$ ), надо доказать попарное равенство трех элементов одного треугольника трем соответствующим элементам другого треугольника ( $\angle 3 = \angle 4$ ;  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $AC = AC$ ).

В равных треугольниках I как ( $\triangle ABC = \triangle ADC$ ) против равных углов ( $\angle 3 = \angle 4$ ) лежат равные стороны ( $BC = AD$ ). Равенство второй пары сторон доказывается аналогично ( $AB = CD$ ). II

Если сторона ( $AC$ ) и два II прилежащих к ней угла ( $\angle 1$  и  $\angle 3$ ) одного треугольника ( $\triangle ABC$ ) равны соответственно стороне ( $AC$ ) и прилежащим к ней углам ( $\angle 2$ ,  $\angle 4$ ) другого треугольника ( $\triangle ADC$ ), то эти треугольники равны: III

$\triangle ABC = \triangle ADC$ .



Чтобы доказать равенство накрест лежащих углов ( $\angle 3 = \angle 4$ ), надо доказать параллельность прямых ( $AB \parallel CD$ ), при которых образованы эти углы секущей  $AC$ .

Если две параллельные прямые ( $AB \parallel CD$ ) пересечены третьей прямой ( $AC$ ), то накрест лежащие углы равны ( $\angle 3 = \angle 4$ ). (Аналогично доказывается, что  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $AC$  — общая сторона.)

Чтобы доказать параллельность прямых ( $AB \parallel CD$ ), надо установить, что они являются сторонами параллелограмма (а это известно по условию: анализ завершен). Другая ветвь анализа относительно второй пары углов ( $\angle 1 = \angle 2$ ) осуществляется аналогично.

Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм (по условию), значит, в нем противоположные стороны параллельны;  
 $AB \parallel CD$ .

Синтез (дедуктивное доказательство). (Читать по схеме снизу вверх.)

По той же схеме можно провести аналогичную работу с обратной теоремой, а именно:

- 1) анализ доказательства обратной теоремы (рассуждение ведем по схеме снизу вверх, против направления двойных стрелок:  $V \Leftarrow I$ );
- 2) дедуктивное доказательство обратной теоремы (рассуждение ведем по схеме сверху вниз, по направлению двойных стрелок:  $I \Rightarrow V$ )<sup>1</sup>.

Рассмотрим подробно эти процессы.

Анализ (поиск) доказательства обратной теоремы (читать по схеме снизу вверх).

Чтобы доказать, что  $ABCD$  есть параллелограмм, необходимо доказать параллельность противоположных сторон ( $AB \parallel CD$ ;  $BC \parallel AD$ ).

По определению четырехугольник  $ABCD$ , у которого противоположные стороны параллельны, называется параллелограммом. Теорема доказана.

<sup>1</sup> Как работа над формулировкой и доказательством четверки теорем логического квадрата, так и четыре рассмотренных процесса, осуществляемые по одной схеме, по своей логической содержательности и дидактической поучительности относятся в равной мере к наиболее эффективным приемам обучения математике



Чтобы доказать параллельность прямых ( $AB \parallel CD$ ), надо доказать равенство накрест лежащих углов, образованных при пересечении их секущей  $AC$  ( $\angle 3 = \angle 4$ ).

Чтобы доказать равенство углов ( $\angle 3 = \angle 4$ ), надо доказать равенство треугольников ( $\triangle ABC = \triangle ADC$ ).

Чтобы доказать равенство треугольников ( $\triangle ABC = \triangle ADC$ ), надо установить попарное равенство всех сторон треугольников ( $AB = CD$ ;  $AD = BC$ ;  $AC = AC$ ). Но это известно по условию теоремы: анализ завершен.

Если при пересечении двух  $IV$  прямых ( $AC$  и  $BD$ ) образовались равные накрест лежащие углы ( $\angle 1 = \angle 2$ ), то эти прямые параллельны:  $AC \parallel BD$ . Аналогично доказывается параллельность  $AB \parallel CD$ . III

В равных треугольниках III ( $\triangle ABC = \triangle ADC$ ) против равных сторон ( $AB = CD$ )  $\uparrow$  лежат равные углы ( $\angle 1 = \angle 2$ ). II

Проведем диагональ  $AC$ , которая делит четырехугольник на два треугольника: они равны по третьему признаку равенства треугольников  $\uparrow$  ( $\triangle ABC = \triangle ADC$ ). I

Дедуктивное доказательство (читать по схеме сверху вниз).

Разумеется, рассуждения, которые мы подробно изложили выше, выполняются устно. Учащиеся в тетрадях записывают лишь приведенную схему доказательства прямой и обратной теорем.

Целесообразно особо сравнить процессы доказательства прямой и обратной теорем (т. е. процессы 3 и 4) и выявить, почему оказалось возможным изобразить доказательства двух теорем в одной схеме (повторим еще раз, что это не всегда возможно).

При этом выясняется следующее:

а) Если в доказательстве прямой теоремы используется второй признак равенства треугольников, то в доказательстве обратной теоремы используется соответственно третий признак равенства треугольников.

Важно здесь то, что на одном уроке использованы два признака равенства треугольников; это лишний раз обеспечивает целостность знаний.

б) В первом случае используется свойство накрест лежащих углов при параллельных:  $(AB \parallel CD) \rightarrow (\angle 3 = \angle 4)$ ; во втором случае — соответствующий признак параллельности:  $(\angle 3 = \angle 4) \rightarrow (AB \parallel CD)$ .



Итак, став на путь противопоставления свойства и признака параллелограмма, мы вынуждены в процессе доказательства применить свойство и признак параллельности прямых. Одно противопоставление ведет другое.

в) В первом случае используется суждение: «В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны»; во втором случае — обратное суждение: «В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы». Трудно найти лучшей формы повторения контрастных утверждений геометрии!

В заключение отметим, что описанная методика совместного изучения прямой и обратной теорем (при единой схеме записи доказательства) представляет ценное средство развития элементов диалектического мышления, ибо при этом создаются условия для превращения мысли в полярную ей форму; в этом случае понятия и суждения, относящиеся к одной теореме, как бы связаны с понятиями и суждениями другой теоремы, органически пронизывая одно другое, как бы проявляясь одно в другом.

Наиболее ценный результат эта система дает, если после доказательства обеих теорем провести сознательное сравнение процессов соответствующих пар суждений, выделив ему специальное время.

Но даже если этого не сделано (скажем, из-за нехватки времени), все равно сам факт противопоставления при рассмотрении взаимосвязанных задач (теорем) способствует более сознательному усвоению изучаемого материала.

Имеются основания считать, что метод противопоставления является определяющим при причинном объяснении успешности всей методики временного «совмещения» прямой теоремы с обратной, соединения анализа с синтезом, который хорошо подтвердился практикой.

Вывод: правильный метод обучения обладает своей внутренней логикой, неизбежно ускоряющей и облегчающей процесс обучения, как в руках опытного, так и начинающего учителя.



## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ленин. Философские тетради. М., Политиздат. 1965.
2. В. И. Ленин. Собрание сочинений, изд. 5, т. 5.
3. В. И. Ленин. Собрание сочинений, изд. 5, т. 42.
4. Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1964.
5. П. К. Анохин. Физиология и кибернетика. В сб. «Философские вопросы кибернетики». М., Соцэкгиз, 1961.
6. И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. Математика. 4 класс. Пробный учебник. М., «Просвещение», 1968.
7. Д. Н. Богоявленский и Н. М. Менчинская. Психология усвоения знаний в школе. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
8. А. А. Вайман. Шумеро-вавилонская математика. М., Изд-во вост. лит., 1961.
9. Л. В. Занков. Дидактика и жизнь. М., «Просвещение», 1968.
10. Я. Б. Зельдович. Высшая математика для начинающих. М., Физматгиз, 1963.
11. Е. Н. Кабанова-Меллер. а) Психология формирования знаний и навыков у школьников. М., Изд-во АПН РСФСР, 1962; б) Обучать учащихся разумно учиться. «Среднее специальное образование», 1965, № 8.
12. З. И. Калмыкова. Психологический анализ формирования понятия о типе задачи. «Известия АПН» РСФСР, 1947, № 12.
13. А. И. Китов и Н. А. Крицкий. Электронные вычислительные машины. М., Изд-во АН СССР, 1958.
14. А. Н. Колмогоров. О профессии математика, изд. 3, дополн., Изд-во МГУ, 1959.
15. Е. Г. же. Кибернетика, т. 51. М., Изд-во БСЭ.
16. Е. Г. же. Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе. «Математика в школе», 1967, № 2.
17. Е. Г. же. Знания, навыки, способности и конкурсные экзамены. «Литературная газета», 1967, № 2.
18. В. А. Крутецкий. О математических способностях у школьников. «Вопросы психологии», М., Учпедгиз, 1960.
19. В. Латышев. Руководство к преподаванию арифметики, 1896.
20. Н. А. Менчинская. Психология обучения арифметике. М., Учпедгиз, 1955.
21. Е. Г. же. Психологические вопросы развивающего обучения и новые программы. «Советская педагогика», 1968, № 6.
22. Э. И. Монозон. Методика и результаты изучения знаний учащихся. «Советская педагогика», 1962, № 9.
23. П. Н. Натансон. Курс высшей математики. М., «Наука», 1968.



24. П. Новиков. Учителю мыслить. «Учительская газета» от 6 июля 1966 г.
25. «Организация урока в передовых школах Липецкой области». Сборник статей. Липецкое книжное изд-во, 1962.
26. И. П. Павлов. Полное собрание сочинений, т. III, ч. I, 1951.
27. Л. А. Петрушенко. Философское значение понятия «обратная связь» в кибернетике. «Вестник Ленинградского университета», 1960, № 17, вып. 3.
28. Д. Пойа. а) Математика и правдоподобные рассуждения. М., Изд-во иностр. лит., 1957; б) Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
29. Н. А. Принцев и др. Математика, 4 класс. Пробный учебник. М., «Просвещение», 1968.
30. «Программы начальной школы». М., Учпедгиз, 1969.
31. А. С. Пчелко и М. И. Мороз. О новой программе по математике для I—III классов. «Начальная школа», 1967, № 5.
32. В. В. Рассохин и Н. А. Целинский. Неполное изображение в ортогональных проекциях. М., Учпедгиз, 1960.
33. К. А. Рыбников. История математики. Изд-во МГУ, 1960.
34. Ю. А. Самарин. Очерки психологии ума. М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
35. А. А. Смирнов. Развитие памяти. «Психологическая наука в СССР», т. I, М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
36. А. В. Соколова. Итоги контрольных и экзаменационных работ за 1965/66 учебный год. «Математика в школе», 1967, № 1.
37. С. Струмилин. Учитель в моей жизни. «Народное образование», 1964, № 4.
38. Д. Стройк. Краткий очерк истории математики. М., «Наука», 1964.
39. Л. Н. Толстой. Педагогические сочинения. М., Учпедгиз, 1948.
40. Р. А. Хабиб. И для опытных и для начинающих. Рецензия на книгу П. М. Эрдниева «Методика упражнений по арифметике и алгебре» («Просвещение», 1965). «Учительская газета» от 8 января 1965 г.
41. А. Я. Хинчин. Педагогические статьи. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
42. Н. Г. Чеботарев. Математическая автобиография «Успехи математических наук», т. IV (27), 1947.
43. У. Росс Эшби. Системы и информация. «Вопросы философии», 1964, № 3.
44. П. М. Эрднев. Обратная задача в курсе арифметики начальной школы. «Начальная школа», 1960, № 6.
45. Е. Г. же. Об изучении тождественных преобразований в VI—VII классах. «Математика в школе», 1960, № 1.
46. Е. Г. же. Составление уравнений как творческая форма работы учащихся. «Математика в школе», 1961, № 1.
47. Е. Г. же. Сравнение и обобщение при обучении математике. М., Учпедгиз, 1960.
48. Е. Г. же. О научных основах построения упражнений по предметам физико-математического цикла. «Советская педагогика», 1962, № 7.
49. Е. Г. же. Обучать математике активно, творчески, экономно. «Народное образование», 1962, № 9.
50. Е. Г. же. О прямых и обратных связях, возникающих при обучении химии. «Химия в школе», 1962, № 4.
51. Е. Г. же. К изучению взаимно обратных явлений и понятий «Физика в школе», 1962, № 5.
52. Е. Г. же. О роли прямых и обратных связей при обучении математике «Вопросы психологии», 1962, № 6.
53. Е. Г. же. Это не парадокс. «Учительская газета» от 25 мая 1963 г.
54. Е. Г. же. Об использовании приема противопоставления на уроках русского языка (Некоторые замечания о структуре упражнений) Сб. «Из опыта работы по русскому языку в восьмилетней школе». М., Учпедгиз, 1963.
55. Е. Г. же. Метод противопоставления на уроках арифметики в первом классе. М., «Просвещение», 1966.



56. Е го ж е. Математика. Пробный учебник для I класса. М., «Просвещение», 1966.
57. Е го ж е. Математика. Учебные материалы для II класса. Элиста, Калмиздат, 1968.
58. Е го ж е. Математика. Учебные материалы для III класса. Элиста, Калмиздат, 1969.
59. Е го ж е. Взаимно обратные действия в арифметике. М., «Просвещение» 1969.
60. Е го ж е. О структуре дидактической единицы усвоения знаний. «Вестник высшей школы», 1968, № 10.
61. Дж. Ю н г. Как преподавать математику, 1912.
- 62 В. Л. Я р о щ у к. Роль осознания типовых признаков при решении арифметических задач определенного типа. «Вопросы психологии», 1959, № 1.

От автора

## ОСНОВЫ М

1. Математическое мышление в математике
2. Роль взаимно обратных действий
3. Метод противоречия
4. О перспективах развития математики
5. О значении чисел
6. О месте обратных действий
7. Определенные связи
8. Математическое мышление учащихся
9. Характерные черты математического мышления
10. Обучение приемы мышления
11. О классификации математических задач
12. О расширении кругов математического мышления
13. Об обучении математике
14. Укрупнение математического мышления
15. О некоторых особенностях математического мышления
16. Выводы . . .

## МЕТОДЫ

1. Введение . . .
2. Возникновение математики
3. Основное содержание математики
4. Сравнение действий
5. Округление
6. Дроби
7. Обращение
8. Приведение к общему знаменателю
9. Одновременное увеличение и уменьшение
10. Умножение и деление



## СОДЕРЖАНИЕ

От автора . . . . .	3
---------------------	---

### ЧАСТЬ I

#### ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

1. Математическое упражнение как основной элемент процесса обучения математике . . . . .	5
2. Роль взаимно обратных связей при изучении математики . . . . .	7
3. Метод противопоставления при обучении математике . . . . .	10
4. О перспективах применения метода противопоставления . . . . .	15
5. О значении цикличности в системе математических упражнений . . . . .	24
6. О месте обратных задач при обучении математике . . . . .	28
7. Определенные и неопределенные задачи. Единичные и множественные связи . . . . .	36
8. Математическое творчество — одна из форм самостоятельности мышления учащихся . . . . .	38
9. Характерные особенности процесса составления задач и примеров . . . . .	41
10. Обучение приему обобщения . . . . .	45
11. О классификации упражнений и о математических терминах . . . . .	55
12. О расширении и углублении математических знаний учащихся . . . . .	58
13. Об обучении как процессе переработки информации . . . . .	63
14. Укрупнение единиц усвоения знаний при обучении математике . . . . .	66
15. О некоторых проблемных вопросах методики математики . . . . .	74
16. Выводы . . . . .	78

### ЧАСТЬ II

#### МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АРИФМЕТИКЕ

##### Обыкновенные и десятичные дроби

1. Введение . . . . .	83
2. Возникновение дробей, их запись и чтение . . . . .	85
3. Основное свойство дроби . . . . .	91
4. Сравнение дробей по величине. Изменение величины дроби в зависимости от изменения членов дроби . . . . .	94
5. Округление дробей . . . . .	99
6. Дроби правильные и неправильные . . . . .	101
7. Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование . . . . .	102
8. Приведение дробей к общему знаменателю . . . . .	105
9. Одновременное изучение сложения и вычитания дробей . . . . .	106
10. Умножение и деление обыкновенной дроби на целое число. Увеличение и уменьшение дроби в несколько раз . . . . .	112
	317



11. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз. (Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100 и т. д.)	115
12. Одновременное изучение умножения и деления дробей	117
13. Умножение и деление целого и смешанного чисел на дробь как частные случаи умножения и деления дроби на дробь	121
14. Умножение и деление десятичных дробей	122
15. Нахождение части от числа и всего числа по его части в разделе «Натуральные числа»	125
16. Нахождение части числа и всего числа по его части в разделе дробных чисел	133
17. Работа над тройкой задач: нахождение части числа, числа по величине его части и задачи типа «Какую часть составляет одно число от другого?» (отношения чисел)	137
18. Распространение свойств действий на дробные числа	139
19. Задачи на проценты	144
20. Об изучении приближенных вычислений в связи с изучением действий над дробями	147

### ЧАСТЬ III

#### МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ

##### Глава I. Тождественные преобразования алгебраических выражений

1. Одновременное изучение сложения и вычитания одночленов и многочленов	150
2. Изучение подтемы «Одночлены»	153
3. Изучение подтемы «Одночлены и многочлены»	159
4. Изучение подтемы «Многочлены»	164
5. Сокращенные действия по формулам	168

##### Глава II. Линейные функции, уравнения и неравенства

1. Составление линейных уравнений и их систем	176
2. Составление параметрической системы уравнений, имеющей одно и то же решение	180
3. О классификации систем линейных уравнений	—
4. Об изучении линейной функции	185
5. Об одновременном изучении линейных уравнений и линейных неравенств	188
6. О решении линейных уравнений и неравенств, в записи которых использован знак абсолютной величины (модуля)	192

##### Глава III. Квадратные функции, уравнения и неравенства

1. О введении понятия «квадратное уравнение»	200
2. Составление уравнений, приводимых к квадратным	205
3. О классификации квадратных уравнений	209
4. О решении уравнений с исследованием	212
5. Составление системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными	216
6. Составление симметрических систем уравнений второй степени	217
7. Составление системы линейных уравнений второй степени, левые части которых однородны относительно $x$ и $y$	219
8. О разложении квадратного трехчлена на множители	221
9. Задачи, решаемые на основании свойств квадратного трехчлена	222
10. Построение графика квадратного трехчлена	223
11. Пропедевтика приема преобразования координат	228
12. Об одновременном изучении уравнения и неравенства второй степени	229



13. Исследование квадратного трехчлена . . . . .	233
14. О преобразованиях квадратных трехчленов и их графиков . . . . .	238
15. О введении понятия «обратная функция» . . . . .	241
16. Составление уравнений парабол . . . . .	247
17. Составление уравнений, удовлетворяющих заданным графикам . . . . .	249
18. Геометрическое построение графиков элементарных функций . . . . .	251

#### Г л а в а IV. Задачи в курсе алгебры

1. Прием сравнения при решении задач алгебраическим способом . . . . .	255
2. О составлении задач по заданному уравнению . . . . .	264
3. Составление задач по аналогии с решенной . . . . .	266
4. Преобразование задачи, решенной посредством системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными . . . . .	271
5. Классификация алгебраических задач, приводящих к линейным уравнениям . . . . .	272
6. Классификация алгебраических задач, приводящих к квадратным уравнениям . . . . .	286
7. Некоторые вопросы составления задач, приводящих к квадратным уравнениям . . . . .	288
8. Составление задач, приводящих к системе уравнений второй степени . . . . .	293

#### Ч А С Т Ь IV

##### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ УПРАЖНЕНИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ

1. Об изучении группы взаимосвязанных задач и теорем . . . . .	296
2. Об изучении четверки задач «логического квадрата» . . . . .	302
3. Методика совместного изучения взаимно обратных теорем . . . . .	307
Литература . . . . .	314



Пюрвя Мучкаевич  
Эрдниев

**МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Редактор *И. С. Михеев*  
Художник *И. Н. Вахлин*  
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*  
Технический редактор *Л. Я. Медведев*  
Корректор *Н. М. Данковцева*

Сдано в набор 23/XII 1969 г. Подписано к печати  
12/VIII 1970 г. 60×90<sup>1/16</sup>. Типографская № 2.  
Печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 17,61. Тираж 40 тыс. экз.  
(План 1970 г., № 109)

Издательство «Просвещение» Комитета по печати  
при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд  
Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавпо-  
лиграфпрома Комитета по печати при Совете Минист-  
ров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59. За-  
каз № 542.

Цена без переплета 48 коп. Переплет 12 коп.





печати  
№ 2.  
с. экз.

печати  
поезд

сглавно-  
Минист-  
50. За-

коп.











Цена 60 к.





1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

1986

1987

1988

1989

1990

1991

1992

1993

1994

1995

1996

1997

1998

1999

2000

2001

2002

2003

2004

2005

2006

2007



**ВСЕГДА  
не верьте  
тому что  
кажется,  
верьте  
ТОЛЬКО  
доказательствам.**



**Чарльз Диккенс. «Большие надежды» 1861 г.**